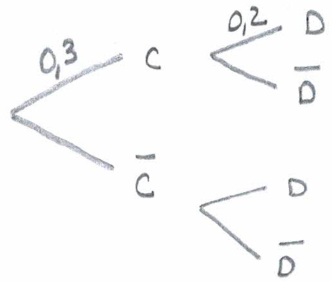
Test maths Tle S sujet 2 (corrigé)

Question 1



$$\bullet\ P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}2$$
$$= \boxed{0{,}06}$$

$$\bullet\ P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$
$$0{,}8 = 0{,}3 + P(D) - 0{,}06$$
$$0{,}8 - 0{,}24 = P(D)$$
$$\boxed{P(D) = 0{,}56}$$

$$\bullet\ P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{0{,}06}{0{,}56} \simeq 0{,}11$$

Question 2

$(P) : 5x + 3y - 4z + 8 = 0$ $\quad A(1; 0; 2)$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (P).

(d) passe par le point $A(1; 0; 2)$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 0 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Question 3 :

1. $|z-3| = |z+4i|$

si $z_A = 3$ et $z_B = -4i$

alors $|z-3| = |z+4i|$

$\iff |z-z_A| = |z-z_B|$

$\iff AM = BM$

$\iff M \in$ à la médiatrice de $[AB]$

VRAIE donc (E) est la médiatrice de $[AB]$

2. $z = 2e^{\frac{j\pi}{7}}$

$z^{2009} = \left(2e^{j\frac{\pi}{7}}\right)^{2009}$

$= 2^{2009}\left(e^{j\frac{\pi}{7}}\right)^{2009}$ $2009 = 7 \times 287$

$= 2^{2009}\left(e^{j\frac{7\pi}{7}}\right)^{287}$

$= 2^{2009}\left(e^{j\pi}\right)^{287}$ $e^{j\pi} = -1$

$= 2^{2009}(-1)^{287}$

$= 2^{2009} \times (-1)$

$= -2^{2009} < 0$ Faux

3. $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1 \iff \frac{|z|}{|1-z|} = 1$

$\iff |z| = |1-z|$ si z est l'affixe de $\vec{OM}$

$\iff OM = AM$ $1-z$ est l'affixe de $\vec{AM}$

$\iff$ (E) est la médiatrice de $[OA]$ donc parallèle à l'axe des imaginaire

Faux

4) $(E) : z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$a = 1 \qquad b = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4$

$= 4\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right)$

$= -4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0$ donc (E) admet 2 solutions complexes

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\qquad z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}{2}$ $\qquad z_2 = \overline{z_1} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$= \dfrac{-2\cos(\pi/5) - 2i\sin(\pi/5)}{2}$

$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = -e^{i\frac{\pi}{5}}$

$|z_1| = |z_2| = 1$ VRAI

Question 4

$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \qquad U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = 1 \times \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

2) a. $\left(\ln(1+e^x)\right)' = \left(\ln(u(x))\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$u(x) = 1+e^x$

$u'(x) = e^x$

$$\mathcal{U}_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = \Big[\ln(1+e^{x})\Big]_0^1$$

$$= \ln(1+e^{1}) - \ln(1+e^{0})$$

$$= \ln(1+e) - \ln 2$$

$$\boxed{\mathcal{U}_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

b- $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \int_0^1 1\,dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 = 1}$$

$$\mathcal{U}_1 = 1 - \mathcal{U}_0$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= \ln e - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e}{\frac{1+e}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{U}_1 = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}$$

3) $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right)}{1+e^{-x}}\,dx$$

$e^{-nx} > 0$ et $1+e^{-x} > 0$

$e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > 1$

$\iff e^{-x} > e^0$

$\iff -x > 0$

$\iff x < 0$ donc sur $[0;1]$ $e^{-x}-1 < 0$

alors $U_{n+1} - U_n < 0$

donc (U_n) est décroissante

$f_n(x) > 0$ donc $U_n > 0$

(U_n) est décroissante et minorée donc (U_n) est convergente.

4) $U_n + U_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}\left(1+e^{x}\right)}{1+e^{-x}}\,dx$$

$\frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = (1+e^x) \times \frac{1}{1+e^{-x}}$

$= (1+e^x) \times \frac{e^x}{1+e^x} = e^x$

$$= \int_0^1 e^{-nx} \times \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx} \times e^x\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{(-n+1)x}\,dx = \left[\frac{e^{(-n+1)x}}{(-n+1)}\right]_0^1 = \frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{e^0}{-n+1} = \frac{e^{-n+1}-1}{-n+1}$$

$$u_n + u_{n-1} = \frac{(1-e^{-n+1})}{-(n-1)} = \frac{1}{n-1}(1-e^{-n+1})$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-e^{-n+1} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ } par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + u_{n-1} = 0$

par unicité de la limite, $L = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n-1} = 0$

Question 5

$P(X<3) = 0,2$ et $P(X<4) = 0,4$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1$$

. $P(X<3) = 0,2$

$$0,2 = \frac{3-a}{b-a}$$

$$0,2(b-a) = 3-a$$

$$b-a = \frac{3-a}{0,2}$$

$P(X<4) = 0,4$

$$\frac{4-a}{b-a} = 0,4$$

$$0,4(b-a) = 4-a$$

$$b-a = \frac{4-a}{0,4}$$

$$\frac{3-a}{0,2} = \frac{4-a}{0,4}$$

$$0,4(3-a) = 0,2(4-a)$$

$$1,2-0,4a = 0,8-0,2a$$

$$-0,2a = -0,4$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$b-2 = \frac{3-2}{0,2}$$

$$b = 5+2$$

$$\boxed{b = 7}$$