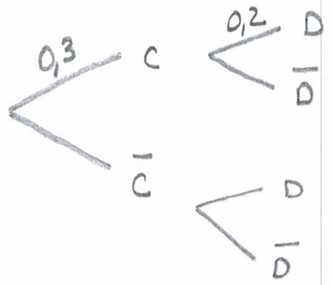
Test maths Tle S sujet 2 (corrigé)

Question 1



$$\bullet\ P(C\cap D) = P(C)\times P_C(D)$$
$$= 0,3\times 0,2$$
$$= \boxed{0,06}$$

$$\bullet\ P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D)$$
$$0,8 = 0,3 + P(D) - 0,06$$
$$0,8 - 0,24 = P(D)$$
$$\boxed{P(D) = 0,56}$$

$$\bullet\ P_D(C) = \frac{P(D\cap C)}{P(D)} = \frac{0,06}{0,56} \simeq 0,11$$

Question 2

$(P) : 5x + 3y - 4z + 8 = 0 \qquad A(1;0;2)$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (P).

(d) passe par le point $A(1;0;2)$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 0 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 3t \\ z = 2-4t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Question 3 :

1. $|z-3| = |z+4i|$

si $z_A = 3$ et $z_B = -4i$

alors $|z-3| = |z+4i|$

$\iff |z - z_A| = |z - z_B|$

$\iff AM = BM$

$\iff M \in$ à la médiatrice de $[AB]$

VRAIE donc (E) est la médiatrice de $[AB]$

2. $z = 2e^{\frac{j\pi}{7}}$

$z^{2009} = \left(2e^{j\frac{\pi}{7}}\right)^{2009}$

$= 2^{2009}\left(e^{j\frac{\pi}{7}}\right)^{2009}$ $\quad 2009 = 7 \times 287$

$= 2^{2009}\left(e^{j\frac{7\pi}{7}}\right)^{287}$

$= 2^{2009}\left(e^{j\pi}\right)^{287}$ $\quad e^{j\pi} = -1$

$= 2^{2009}(-1)^{287}$

$= 2^{2009} \times (-1)$

$= -2^{2009} < 0$ Faux

3. $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1 \iff \dfrac{|z|}{|1-z|} = 1$

$\iff |z| = |1-z|$ si z est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$

$\iff OM = AM$ $\quad 1-z$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$

Faux $\iff (E)$ est la médiatrice de $[OA]$ donc parallèle à l'axe des imaginaire

4) $(E) : z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$a = 1 \quad b = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4$

$= 4\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right)$

$= -4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0$ donc (E) admet 2 solutions complexes

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$= \dfrac{-2\cos(\pi/5) - 2i\sin(\pi/5)}{2}$

$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = -e^{i\frac{\pi}{5}}$

$|z_1| = |z_2| = 1$ VRAI

Question 4

$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$ $\quad U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = 1 \times \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

2) a. $\left(\ln(1 + e^x)\right)' = \left(\ln(u(x))\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

$u(x) = 1 + e^x$

$u'(x) = e^x$

$$\mathcal{U}_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1$$

$$= \ln(1+e^1) - \ln(1+e^0)$$

$$= \ln(1+e) - \ln 2$$

$$\boxed{\mathcal{U}_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

b- $$\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \int_0^1 1\,dx = \left[x\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 = 1}$$

$$\mathcal{U}_1 = 1 - \mathcal{U}_0$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= \ln e - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e}{\frac{1+e}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{U}_1 = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}$$

Objet **Numéro 1 Scolarité - Notification de fin des cours**
De <admin-agc@numero1-scolarite.net>
À <v.tourmente@numero1-scolarite.fr>
Date 29.06.2018 03:26

Cher parent,

La commande de cours pour Cheveux Simon que vous avez passée touche à sa fin. Nous espérons que votre enfant a bien progressé.

C'est l'occasion de faire un point avec votre responsable d'agence (Virginie Tourmente - v.tourmente@numero1-scolarite.fr). Il sera ravi d'analyser avec vous les progrès de votre enfant et de vous apporter de nouveaux conseils si nécessaire. Si vous souhaitez commander de nouveaux coupons d'heures de cours, vous pouvez le faire directement en ligne depuis votre espace famille : https://client.numero1-scolarite.net/.

J'ai à coeur que chaque enfant se sente heureux dans sa scolarité, raison pour laquelle j'ai fondé Numéro 1 Scolarité il y a 10 ans, et je vous remercie sincèrement pour votre confiance.

Emmanuelle Conrad
Directrice Générale
e.conrad@numero1-scolarite.fr

A bientôt sur client.numero1-scolarite.net,
L'équipe Numéro 1 Scolarité.

https://client.numero1-scolarite.net/

Objet **Numéro 1 Scolarité - Notification de fin des cours**
De <admin-agc@numero1-scolarite.net>
À <v.tourmente@numero1-scolarite.fr>
Date 29.06.2018 03:26

Cher parent,

La commande de cours pour Costa Sousa Pédro que vous avez passée touche à sa fin. Nous espérons que votre enfant a bien progressé.

C'est l'occasion de faire un point avec votre responsable d'agence (Virginie Tourmente - v.tourmente@numero1-scolarite.fr). Il sera ravi d'analyser avec vous les progrès de votre enfant et de vous apporter de nouveaux conseils si nécessaire. Si vous souhaitez commander de nouveaux coupons d'heures de cours, vous pouvez le faire directement en ligne depuis votre espace famille : https://client.numero1-scolarite.net/.

J'ai à coeur que chaque enfant se sente heureux dans sa scolarité, raison pour laquelle j'ai fondé Numéro 1 Scolarité il y a 10 ans, et je vous remercie sincèrement pour votre confiance.

Emmanuelle Conrad
Directrice Générale
e.conrad@numero1-scolarite.fr

A bientôt sur client.numero1-scolarite.net,
L'équipe Numéro 1 Scolarité.

https://client.numero1-scolarite.net/

3) $$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right)}{1+e^{-x}}\,dx$$

$e^{-nx} > 0$ et $1+e^{-x} > 0$

$$e^{-x}-1 > 0 \iff e^{-x} > 1$$
$$\iff e^{-x} > e^0$$
$$\iff -x > 0$$
$$\iff x < 0$$

donc sur $[0;1]$ $e^{-x}-1 < 0$

alors $u_{n+1} - u_n < 0$

donc (u_n) est décroissante

$f_n(x) > 0$ donc $u_n > 0$

(u_n) est décroissante et minorée donc (u_n) est convergente.

4) $$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}\left(1+e^{x}\right)}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$\frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = (1+e^x)\times\frac{1}{1+e^{-x}} = (1+e^x)\times\frac{e^x}{1+e^x} = e^x$$

$$= \int_0^1 e^{-nx}\times\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\times e^{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{(-n+1)x}\,dx = \left[\frac{e^{(-n+1)x}}{(-n+1)}\right]_0^1 = \frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{e^0}{-n+1} = \frac{e^{-n+1}-1}{-n+1}$$

$$u_n + u_{n-1} = \frac{\ldots}{-(n-1)} = \frac{1}{n-1}\left(1-e^{-n+1}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} e^{-n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n+1} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

par quotient, $\lim_{n\to+\infty} U_n + U_{n-1} = 0$

par unicité de la limite, $L = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n-1} = 0$

Question 5

$P(X<3) = 0,2$ et $P(X<4) = 0,4$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1$$

. $P(X<3) = 0,2$

$$0,2 = \frac{3-a}{b-a}$$

$$0,2(b-a) = 3-a$$

$$b-a = \frac{3-a}{0,2}$$

$P(X<4) = 0,4$

$$\frac{4-a}{b-a} = 0,4$$

$$0,4(b-a) = 4-a$$

$$b-a = \frac{4-a}{0,4}$$

$$\frac{3-a}{0,2} = \frac{4-a}{0,4}$$

$$0,4(3-a) = 0,2(4-a)$$

$$1,2 - 0,4a = 0,8 - 0,2a$$

$$-0,2a = -0,4$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$b - 2 = \frac{3-2}{0,2}$$

$$b = 5+2$$

$$\boxed{b = 7}$$