- Voici une proposition en vue d'une remédiation.

Proposition

- Si l'élève a eu une image visuelle
  - Lui proposer
    - soit de la **rectifier**
    - soit de la **préciser**

    et de **prolonger** par un discours intérieur explicatif.
- Si l'élève dit quelque chose
  - Lui proposer un discours explicatif correcteur, à prolonger ou non par une image visuelle

- Bien respecter ces principes de base :
– c'est l'élève qui doit analyser son erreur,
– c'est l'élève qui choisit son mode de correction évocatif.

- Chaque élève doit prendre le temps d'évoquer :
– son explication de l'erreur,
– son moyen de s'autocorriger,
– les **situations** dans lesquelles il retrouvera ce genre de calcul, ainsi que les **moyens** mentaux qu'il décide de se donner pour ne plus refaire l'erreur.

- Le professeur doit insister, dans ce type de séance, sur le fait qu'il n'y a pas de fautes d'étourderie ! Chaque erreur a une raison d'être et elle va revenir si l'élève ne se donne pas des moyens précis de la corriger.

- Verbaliser et faire évoquer le rôle de chacun dans le groupe et l'importance de l'aide mutuelle apportée en dialogue pédagogique :
« On est tous là pour se donner des idées d'évocations et améliorer notre activité intellectuelle. »

3 Troisième séance

- Le professeur indique :
« Je vais vous demander de prendre quelques instants pour faire revenir la fiche « – »... et ce que nous avions fait ensemble. »

- Proposer ensuite :
« Nous allons voir ensemble, à partir de ce que vous savez déjà faire, comment on pourrait enlever des parenthèses en calcul algébrique. »

Par exemple, enlever les parenthèses, puis calculer : B = (5 – 7) – (– 6 + 3 – 2)
Que signifie chacun de ces signes?

(5 – 7) – (– 6 + 3 – 2)

position   position

« j'enlève »

- Faire évoquer puis exprimer la progression par rapport au début du cours.

- Prévenir qu'il faut apprendre pour savoir et savoir faire.

Mise en projet d'application contextualisée puis d'explication

Loi des évocations

Image visuelle + verbalisation | Verbalisation + image visuelle

Évocation de transfert - Imaginaire d'avenir
Dans un imaginaire d'avenir, l'élève doit absolument **se donner** les moyens de ne pas refaire l'erreur. Il doit être **acteur** de la remédiation.

La métaphore de T. Buzan dans son livre : *Dessine-moi l'intelligence*, Éd. d'Organisation, plaît assez aux élèves : «L'erreur est sur un sentier tracé dans la forêt du cerveau à force de passages. Il est nécessaire de débroussailler à côté de ces sentiers pour installer de nouveaux itinéraires... Il faudra du temps et de la décision!»

Temps d'évocation du rôle du groupe dans le traitement de l'erreur
L'erreur n'est pas le signe d'une quelconque incapacité, mais l'aboutissement logique d'un itinéraire mental inadapté.
L'erreur est utile!

Enlever les parenthèses

3

Temps d'évocation de la fiche
"Le signe moins «–»"

Temps

Qu'est-ce qui vous revient? (contenu évocatif) | Comment cela vous revient-il? (forme)

Il s'agit là de se mettre en projet d'élargissement et de transfert.

Reproposer deux méthodes d'appui sur

des automatismes | du concret

Règle de la parenthèse précédée du signe «–» | Métaphore

$5 - 7 - (-6 + 3 - 2)$

= cadeau

= punition

= cadeau

Évocation du sentiment de plus grande compétence dans l'explication d'un «pourquoi».

Mise en projet de mémorisation (projet ouvert à l'application et à l'explication).

FICHE D'ACTIVITÉ 5

MISE EN ÉQUATIO

Finalités communiquées aux élèves
Trouver une méthode générale pour résoudre leurs difficultés à mettre un problème en équation à partir de l'expérimentation d'un outil.

Objectifs pédagogiques

- **Traduire un énoncé en langage mathématique.**
- **Utiliser une équation pour une résolution de problème.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première phase

- Demander aux élèves de laisser revenir dans leur tête tout ce qu'ils ont appris sur les équations et les interroger rapidement sur ce qu'ils ont évoqué.
- Faire état des difficultés de certains à mettre un problème en équation même s'ils sont à l'aise dans la résolution de celle-ci.

- Faire exprimer les élèves sur ce qui les dirige quand ils sont face à un énoncé et mettre en évidence le projet dominant de *trouver l'équation*.

- On recherche un schéma et une stratégie utilisables quel que soit le problème.

2 Deuxième phase

Le professeur propose le problème suivant :
« Un père a 28 ans de plus que son fils. Dans 8 ans son âge sera le double de celui de son fils. Trouver l'âge du père et l'âge du fils. »
Recherche individuelle (de quelques minutes) et mise en commun (sur le schéma construit progressivement au tableau).
- La mise ne commun doit être très lente, progressive, pour permettre aux élèves en difficulté d'évoluer à leur rythme. Il convient de retarder la présentation des réponses. Si l'équation est donnée trop rapidement, elle bloque la réflexion de tous ceux qui n'y étaient pas parvenus.

Cette séquence trouve sa justification et ses fondements dans l'exposé théorique du début du chapitre. Elle propose l'expérimentation d'un outil qui aide à l'activité mentale de sériation spatiotemporelle.

Expérimentée en classe de 4^e, elle a permis la dédramatisation d'un apprentissage délicat : la mise en équation d'un problème est en effet un exercice qui désarme beaucoup d'élèves. Leur proposer une stratégie les aide à lever le mystère de la réussite.

Objectifs méthodologiques

- **Analyser et séparer les différents éléments spatio-temporels d'un énoncé.**
- **Mettre en place une stratégie transférable quel que soit le problème à résoudre.**

COMMENTAIRES

Recherche d'une stratégie fiable 1

Évocation des prérequis

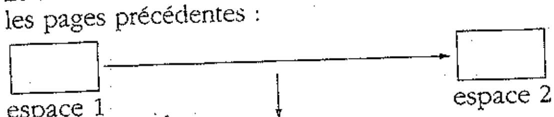
- Savoir résoudre des équations simples
- Avoir déjà étudié quelques exemples de mise en équation d'un problème

Il s'agit d'établir là un dialogue pédagogique pour mettre en évidence les projets mentaux des élèves en situation-problème.

Toute leur activité mentale est tendue dans la direction de l'objectif à atteindre. Cette finalité les empêche souvent d'analyser les *données* du problème.

Les élèves sont invités à se mettre en projet d'acquisition d'une méthode sûre, utilisable dans tous les problèmes.
Les espaces seront aussi nombreux que les nombres à trouver.

Le schéma de base est celui qui a été exposé dans les pages précédentes :



Mise en situation d'exercice 2

Voici la STRATÉGIE EN CINQ POINTS de mise en équation d'un problème proposée à la classe :

1. Combien y a-t-il dans ce problème de *nombres cachés*?
2. Poser en schéma autant d'espaces que de nombres cachés.
3. Choisir *l'un deux* comme inconnue : «x».
4. Poser des flèches pour relier les espaces et chercher à partir de l'énoncé les opérations à poser sur ces flèches (transformations à faire pour passer de l'un à l'autre).
5. Effectuer des comparaisons entre plusieurs espaces pour aboutir à une **égalité**.

3 Troisième phase

• Le schéma est posé par étapes, lentement, pour permettre à tous de décomposer la stratégie en étapes bien repérées. Il est construit à partir des 5 questions posées aux élèves. La dernière question doit permettre l'émergence de l'équation.

• Les élèves sont encouragés ensuite à refaire mentalement tout l'itinéraire, question après question, et ensuite à exprimer leur ressenti sur le schéma proposé.

4 Quatrième phase

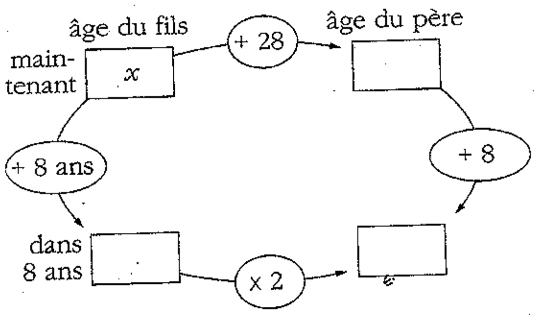
• Prévenir que le schéma précédent n'est pas figé : si les nombres cachés sont toujours désignés par des «espaces» et les opérations posées sur des «flèches», le nombre et la position relative des espaces peuvent changer d'un problème à l'autre.

• Donner le texte d'un second problème :
« Une fermière va au marché avec un panier plein d'œufs. Elle en vend les 2/9 moins 5 œufs. Si elle rajoutait 37 œufs dans son panier, il contiendrait alors 1/6 de plus qu'au départ. Combien le panier contenait-il d'œufs au départ ? »
Il suffit alors de comparer les 2 itinéraires :
étape 1 → étape 2 → étape 3 et étape 1 → étape 3 (raccourci) pour obtenir l'équation :

$$x - \left(\frac{2}{9}x - 5\right) + 37 = x + \frac{1}{6}x$$

• Il faudra multiplier les exercices pour tester la pertinence du schéma.

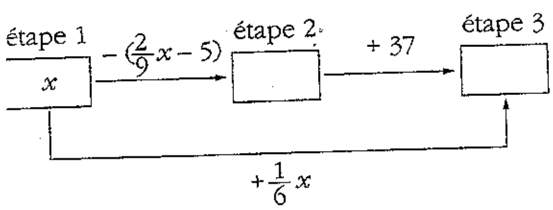
3 Schéma de résolution



L'élève complète les différentes cases, la comparaison des 2 dernières lui fournit l'équation :

$$(x + 8) \times 2 = (x + 28) + 8$$

4 Transfert sur un autre exercice



Certains élèves exprimeront qu'ils n'ont pas eu besoin du schéma. Il faudra leur dire que si un jour, dans un exercice, ils ont un peu de mal à trouver l'équation, ils peuvent penser à l'utiliser.

Le schéma n'est pas un passage obligé, il est un outil *au service* de tous ceux dont l'activité mentale de sériation spatio-temporelle ne se déroule pas spontanément.

FICHE D'ACTIVITÉ 6

FICHE DE SUIV

Finalités communiquées aux élèves
Déraciner des erreurs qui ont la fâcheuse tendance à être récurrentes et se donner des moyens de ne plus les refaire.

Objectifs pédagogiques

- **Replacer un exercice dans un contexte élargi.**
- **Faire le lien entre un cours et des exercices.**
- **Analyser les erreurs.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première phase

• Le professeur amène ses élèves à se souvenir d'erreurs qu'ils ont tendance à faire et refaire : «Est-ce que cela vous est déjà arrivé?... quels types d'erreurs?... Fautes de copies, fautes de calcul, fautes d'étourderie!»

Les fautes d'étourderie n'existent pas! Il y a toujours une raison à une erreur.

• L'enseignant peut très bien prendre un exemple comme : $23 + 5 \times 7 - 3 \times 2 + 12$ qui devient par exemple à la ligne suivante : $23 + 35 \oplus 6 \ominus 12$ et expliquer à ses élèves qu'il y a une raison fréquente à ce type d'erreur : en même temps qu'il écrit, l'élève pense déjà au calcul qui va suivre. Il y a un décalage entre sa main et sa pensée. Il n'est pas dans le présent de son calcul, mais déjà dans le futur de ce qu'il va faire à la ligne suivante.

• Faire exprimer la classe sur cette explication : «Qu'en pensez-vous?» Il y en aura toujours qui vont se sentir concernés.

• Faire rechercher ce qu'il conviendrait de faire. Certains élèves expriment alors : «Il faut relire!» D'autres répondent : «Je relis et pourtant je ne vois jamais mes erreurs.»

Effectivement le relecture ne suffit pas toujours, tout dépend de l'activité mentale pendant cette relecture et du projet qui la structure.

• Puisque l'erreur a pour origine le décalage entre les évocations d'anticipation et la main qui traîne, c'est de la main qu'il faudra prendre conscience.

2 Deuxième phase

• Le professeur présente le document à utiliser à chaque correction de devoir. Il expose ses objectifs en terme d'analyse des erreurs, de repérage de leur source mentale et de découverte de moyens de remédiation et de prévention.

Il y a toujours une logique à une erreur, elle est le résultat d'une activité mentale précise. Si l'activité mentale n'est pas modifiée, l'erreur va revenir. (Une erreur a «la peau dure»!)

Le temps de correction des exercices et des devoirs est important dans le cours de mathématiques. Trop souvent vécu dans la passivité générale, voire l'ennui, il doit être repensé.

Pour qu'une correction soit utile, il faut qu'elle réponde à une attente ou une interrogation de chaque élève. C'est dans cette perspective ambitieuse que se situe la présente fiche.

Objectifs méthodologiques

- **Élargir son projet de réflexion : exemples et lois.**
- **Élargir son projet de compréhension : appliquer et expliquer.**
- **Mettre un acquis à disposition pour le futur : anticiper mentalement un avenir original, un inédit.**

COMMENTAIRES

Un constat

1

Ménager un temps d'évocation de situations d'exercices ou devoirs dans lesquels les élèves ont repéré des erreurs fréquentes.

Mise en projet d'explication d'une erreur type : «la faute de copie»
L'explication fournie spontanément par les élèves est «faute d'inattention». Si on en reste à ce constat vague, où est la solution?... Être plus attentif?...

Oui, mais attentif à quoi? C'est cela qu'il faudra préciser.

Il s'agit là de se mettre en projet d'auto-remédiation à partir d'une stratégie *évocative*.

Il faut montrer aux élèves que leurs évocations doivent se déplacer et faire le va-et-vient incessant entre le calcul pensé et la main qui écrit.

Proposition de l'outil fiche de suivi

2

La fiche de suivi est faite pour aider chaque élève à observer, analyser ses erreurs; pour les déloger.

Fiche de suivi			
Nom :			
Devoir n°	Thème	Commentaires du professeur et erreurs	Mes commentaires et analyses pour une autre fois !

Il est souhaitable de faire cette présentation avant la remise du premier devoir, de distribuer ensuite les devoirs aux élèves et de leur montrer comment remplir la fiche en les accompagnant individuellement. Ils y seront maladroits car ils ne sont pas habitués à cette activité. Ce n'est qu'après plusieurs devoirs qu'ils peuvent arriver à des observations pertinentes. Il faut du temps pour acquérir cette capacité d'auto-observation. La fiche de suivi est à remplir *avant* toute correction collective, mais peut être reprise après.

3 Troisième phase

Thème

• Il s'agit de noter les sujets du cours concernés par les différentes parties du devoir. L'objectif est d'habituer l'élève à replacer un exercice dans un contexte plus large et de l'aider à **faire le lien entre le cours et les exercices**. Trop souvent en effet, les élèves, installés dans la répétition des exercices, en arrivent à évacuer les lois mathématiques et sont incapables de donner par exemple le titre du chapitre dans lequel ils manipulent habilement leurs savoir-faire.

Commentaires du professeur

Chaque remarque du professeur doit faire l'objet d'un commentaire de l'élève.

Pendant que chacun fait ce travail, l'enseignant passe dans les rangs et se met à disposition de l'un ou de l'autre. C'est un moment privilégié de contacts individuels et l'occasion de dialogues pédagogiques personnalisés.

• Il est une dimension de la correction des devoirs sur laquelle il est bon d'insister : toute la démarche exposée ici doit être vécue par rapport à un **futur d'exploitation des découvertes** de chacun à partir de l'analyse de ses devoirs. Le devoir que l'élève est en train de corriger, c'est du **passé**. Il doit comprendre ses erreurs bien sûr, mais pas uniquement pour être capable de refaire *ce* devoir. Il y a fort peu de chances que les devoirs à venir soient des répliques de celui-là. Tout son effort de compréhension doit tendre vers la mise en place d'indices à réutiliser dans l'avenir de façon la plus large possible.

Mode d'emploi de la fiche de suivi

Chaque erreur doit être notée soigneusement et analysée.
Il faut en trouver l'origine : loi non respectée, mal appliquée, mal énoncée, erreur de calcul, etc.
La recherche du pourquoi de ses erreurs va donner à l'élève l'habitude de prendre du recul par rapport à ses productions écrites, de devenir en quelque sorte spectateur de ses réalisations. C'est d'un changement de regard qu'il s'agit.
Expliquer ses erreurs et trouver des moyens de les prévenir permet de les dédramatiser.

Un exercice n'est pas transférable dans l'état, une stratégie de résolution oui, et une démarche mentale assurément! Un exercice n'est pas un but en soi, c'est l'occasion d'y apprendre quelque chose pour une autre fois. C'est un tremplin pour aller vers d'autres exercices.

« Qu'est-ce que j'ai appris aujourd'hui, dans ce devoir, qui pourrait me servir pour d'autres fois ? »
Cette question sera systématiquement posée à la classe, l'enseignant fera alors s'exprimer ceux qui ont pu formuler une réponse.

3 La démonstration : apprentissage du raisonnement déductif

Les nouveaux programmes de mathématiques du collège prévoient comme les anciens une initiation progressive à la déduction dès la classe de 6ᵉ et un apprentissage de la démonstration à proprement parler dès la classe de 5ᵉ. Il faut remarquer *que les élèves arrivent en 4ᵉ avec un a priori négatif par rapport à la démonstration.* Ils expriment : «C'est dur! Je n'aime pas! Je n'y arrive pas! Je ne sais pas faire! Je n'y comprends rien!» L'enseignant de 4ᵉ doit alors se livrer à un véritable travail de dédramatisation d'un apprentissage qui se passe rarement en douceur.

Dans les faits, la démonstration ne fait pas explicitement l'objet d'un enseignement. L'enseignant montre un certain nombre d'exemples, demande à des élèves de reproduire ces modèles et évalue les productions individuelles en pointant alors acquisition ou non-acquisition de l'activité mathématique.

L'analyse des difficultés exprimées par les élèves ou relatées par leurs enseignants, sous l'éclairage de la Gestion mentale, permet à l'enseignant de faire des choix pédagogiques susceptibles de faciliter l'accès au raisonnement déductif.

Le travail qui va être exposé propose un repérage des principaux obstacles, une analyse épistémologique des difficultés d'apprentissage et une panoplie d'outils didactiques expérimentés depuis plusieurs années avec succès dans les classes de 5ᵉ et de 4ᵉ.

CONSTAT : REPÉRAGE DES DIFFICULTÉS

L'élève de 4ᵉ exprime très souvent son malaise en géométrie en disant : «Je ne comprends rien à la démonstration.» Le professeur dit de lui : «Il a des difficultés de raisonnement.» Le premier ne voit pas comment s'en sortir, il n'y peut rien, c'est comme ça! Le second met le doigt sur un symptôme très vague, manifestation d'on ne sait quelle incapacité. Tous deux font en quelque sorte le constat de leur commune impuissance en un amalgame aux sources multiples.

À y regarder d'un peu plus près, on se rend rapidement compte que ces difficultés ne se situent pas toutes au même niveau. Il y a des difficultés à toutes les étapes du cheminement. Derrières elles se cachent à coup sûr des obstacles de nature tout à fait différente suivant les élèves. La démonstration est une activité intellectuelle complexe qui mobilise tous les gestes mentaux.

En quoi est-ce difficile? Comment, très précisément, les difficultés se manifestent-elles? Les réponses des élèves et des enseignants permettent un premier repérage des principaux obstacles.

A Les principaux obstacles

▪ **Mémoriser** : *réciter un théorème* en rentrant dans la rigueur du vocabulaire et des notations mathématiques. Très souvent les élèves «racontent» l'histoire du théorème, qu'ils ont apparemment compris, en utilisant leurs propres mots avec tous les risques que cela suppose de perte du sens mathématique.

▪ **Réfléchir** : *dans un problème précis mobiliser les bons théorèmes, les bonnes définitions, les bonnes lois...* Même si ceux-ci sont bien sus, ils ne sont pas toujours spontanément rendus disponibles, «mis à disposition».

▪ **Comprendre** : *faire la différence entre deux théorèmes proches* (un théorème et sa réciproque). Même si ceux-ci sont parfaitement sus (bonne mémorisation), le mauvais choix d'utilisation de l'un pour l'autre en problème montre bien que les élèves n'ont pas compris la logique des deux propositions. *Comprendre les conditions d'utilisation* de l'un ou de l'autre. *Séparer dans la proposition apprise le «si» du «alors»* et leur enchaînement logique temporel. Installer dans l'histoire du théorème deux séquences, une séquence initiale et une séquence finale. Saisir la logique de la proposition mathématique.

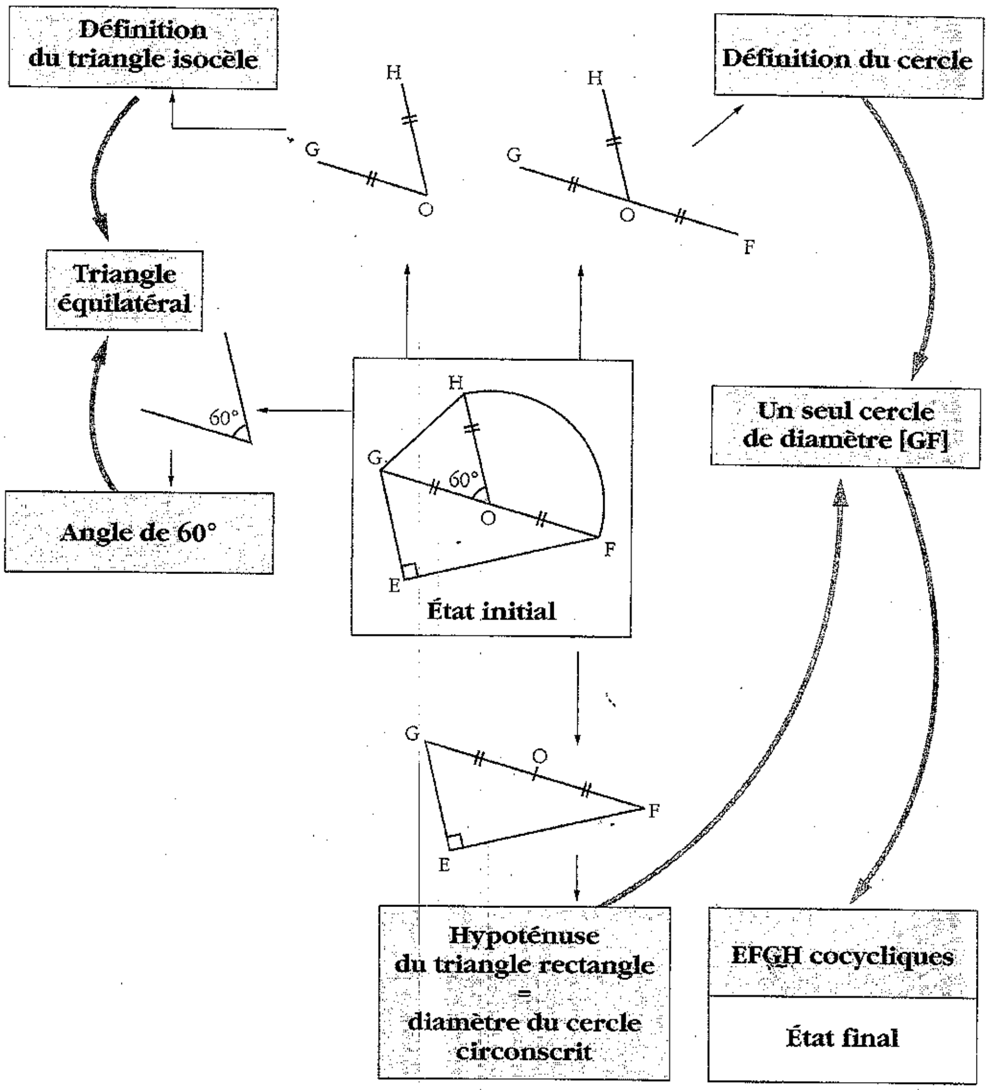
▪ **Analyser** : *analyser à la fois le dessin et les mots de l'énoncé*, en ne perdant pas de vue que le dessin est une concrétisation figée d'une situation mathématique beaucoup plus générale et beaucoup plus abstraite. Lorsque l'élève dessine une droite, il ne s'agit que d'une pâle représentation d'un objet mathématique (sans épaisseur, sans extrémités), ensemble infini de points. Ce qui «apparaît» sur ce dessin doit être pris avec une extrême prudence, les seules certitudes étant contenues dans les mots et les symboles donnés dans les hypothèses. *Bien faire la part entre ce qui est su et ce qui est à prouver*, entre les données et les questions posées, entre les hypothèses et les conjectures, entre les hypothèses et les conclusions.

▪ **Synthétiser** : à l'intérieur d'un problème, *replacer chaque nouvelle découverte* en lien avec ce qui était déjà connu pour identifier de nouvelles structures-modèles et avancer de déduction en déduction. *Inscrire chaque loi dans un contexte* plus général en faisant des liens entre plusieurs théorèmes, plusieurs chapitres (y compris plusieurs programmes sur plusieurs années scolaires) et imaginer des utilisations possibles de ces théorèmes en en repérant les conditions d'utilisation sans les enfermer dans des registres trop étroits et en en prévoyant des utilisations aussi larges que possible.

Pour aller plus loin dans cette analyse, la Gestion mentale nous offre une grille de lecture fort intéressante, elle permet à l'enseignant de remonter à la source des difficultés et lui donne ainsi accès à la découverte des moyens de **prévention**.

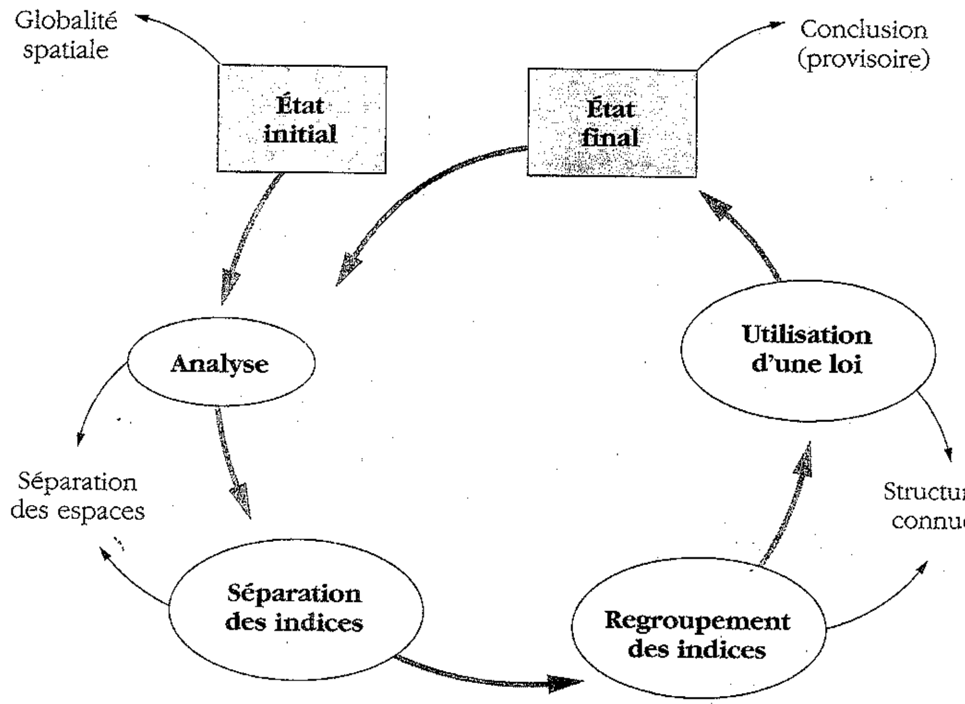
B — Mettre en évidence des indices pertinents pour retrouver des structures connues

Voici un exemple des connaissances à mobiliser lors d'une démonstration. On note les multiples rappels et mises en relation nécessaires que certains élèves ne peuvent faire aisément.



Voici un schéma de la boucle de la démonstration en géométrie qui nous servira de base pour étudier les différentes difficultés qui se posent à l'apprenant.

La boucle de la démonstration en géométrie



DIFFICULTÉS EN TERMES DE GESTION MENTALE

A La réflexion devant un problème de géométrie

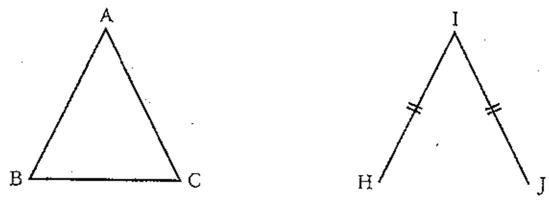
Dans un problème de géométrie, il y a en général un énoncé en mots qui s'accompagne ou non d'une figure. De toute façon, l'élève va synthétiser toutes les données du problème dans un dessin. Celui-ci, par sa nature spatiale, va s'imposer à lui dans sa globalité. Parmi tous les éléments donnés, dans la plupart des cas, il ne va évoquer que le dessin, celui-ci va envahir tout son champ mental. Dans le dessin, il y a tout : les données, les hypothèses, les éléments qui apparaissent à partir de ces données, les conséquences des hypothèses, les conclusions. S'il n'y a pas de retour à l'analyse du texte, il risque d'y avoir confusion entre tous ces différents points. Il y a risque de ne pas faire la différence entre ce qui est donné (les certitudes contenues dans le texte ou dans les symboles sur la figure de géométrie) ou ce qu'on a découvert, d'une part, et les conjectures, les suppositions qu'on a pu faire et qu'on sera amené à démontrer, d'autre part. On est face à une globalité, un espace qui contient tout! De cet espace global il va falloir extraire des espaces, séparer des indices, ce qui suppose un travail mental important, difficile pour beaucoup.

L'élève doit pouvoir :

1. **extraire de l'ensemble de son dessin un ou plusieurs indices** de façon à les mettre en relation avec ses évocations (visuelles ou verbales) des théorèmes appris. Il doit séparer des indices contenus à la fois dans les données, la figure et les questions posées. Cela suppose en quelque sorte un effacement mental de certains élé-

ments du dessin pour n'en conserver qu'une partie. L'élève peut le faire verbalement en se faisant des commentaires sur des parties du dessin. Il peut aussi le faire en images mentales visuelles : effaçage, surlignage, gros plan, utilisation de la couleur et de la luminosité dans ses images visuelles. C'est un travail d'analyse qui consiste à partir soit de la globalité du dessin pour revenir aux éléments de l'énoncé, soit des éléments de l'énoncé pour aller à la globalité du dessin (voir annexes);

2. **se méfier de ce qu'il voit!** Faire la différence entre ses certitudes, contenues dans les hypothèses, et ses découvertes sur le dessin qui ne peuvent être que des conjectures et devront être vérifiées, prouvées, les preuves à utiliser étant les théorèmes et lois mathématiques. Ce qui va lui sembler évident ne l'est pas forcément (surtout s'il a eu le malheur de faire une figure correspondant à un cas particulier). Il doit développer son «œil de mathématicien» (A. Taurisson). Le mathématicien qui voit le dessin 1 dira : «Le triangle ABC est peut-être isocèle mais il faudra le prouver.» S'il voit le dessin 2, **il va imaginer ce qu'il ne voit pas**, c'est-à-dire le triangle IHJ qui n'est pas dessiné et il dira : «Le triangle IHJ est vraiment isocèle car HI = HJ.»



B — La prégnance du projet de résolution évoquer le Pb par seul^t les questions

Dans un texte, il y a des données et des questions. L'élève va concrétiser l'énoncé dans un dessin. Les données, pour une majorité des élèves, ne servent qu'à *faire la figure*. Une fois que le dessin est fait, les données sont en quelque sorte éliminées, les mots n'existent plus.
Les élèves en difficulté, sachant qu'il y a quelque chose à résoudre, n'évoqueront que la question. Les nombreux dialogues pédagogiques menés avec des élèves en difficulté aussi bien de collège que de lycée me permettent d'affirmer que le travail évocatif sur un énoncé de problème de géométrie porte beaucoup plus sur les questions posées que sur les données du problème (hypothèses). Ces élèves sont en majorité envahis par un projet dominant de résoudre le problème, de répondre à la question posée : ce projet mental place les hypothèses au second plan par rapport au but à atteindre. Or, ce sont des éléments non évoqués ou insuffisamment évoqués qui contiennent les moyens mentaux de mise en relation avec les acquis, donc de résolution. L'activité mentale est tellement tendue vers le but à atteindre qu'elle néglige le point de départ du chemin à créer. Sans cette origine, comment s'inventer un itinéraire?

C — Le manque de retour en arrière

La résolution d'un problème de géométrie, véritable jeu de construction où les questions s'enchaînent de façon *linéaire* (une question en entraîne une autre qui elle-même en fait surgir une troisième), nécessite un continuel va-et-vient entre ce qui vient d'être démontré et ce qui était déjà connu. Il s'agit de replacer toute nouvelle découverte à l'intérieur de l'ensemble des éléments connus et de créer à chaque fois de nouveaux liens dans des *globalités* successives qui sont à réorganiser sans cesse.
Le problème de géométrie exige une grande activité mentale mêlant continuellement linéarité et globalité, P2 et P3, retour en arrière pour globaliser, prendre appui sur des acquis antérieurs, anticiper la question à venir.
Le problème de géométrie nécessite une très grande mobilité évocative, c'est le fait des bons élèves en mathématiques qui sont en interrogation permanente par rapport à ce qu'ils apprennent :
«Qu'est-ce qu'on me donne? Qu'est-ce qu'on me demande? (présent)

Qu'est-ce que j'ai appris à ce sujet? (passé)
Quelle est l'idée du professeur? À quoi puis-je m'attendre? (futur)»

Ils sont vraiment dans le passé de leurs acquis, dans le présent de ce qu'on leur donne, mais également dans le futur de ce qu'ils vont avoir à faire, en anticipation constante des problèmes posés.
Les élèves qui échouent sont uniquement dans le présent de la globalité spatiale ou continuellement dans le futur de ce qu'il y a à faire. Ils sont quelque part figés. À cela s'ajoute la difficulté à trouver le «bon théorème». Beaucoup d'élèves vont avoir une intuition juste du résultat, mais ils auront beaucoup de mal à trouver les théorèmes clés de la démonstration.

Cette agilité mentale nécessaire à la démonstration est une habitude à acquérir, elle peut l'être spontanément par de bons élèves, elle peut être suscitée, entraînée, cultivée chez **tous** les autres!

C'est aussi le rôle du professeur de mathématiques de faire acquérir cette habitude.

D — La difficulté de trouver le «bon théorème»

Les difficultés qui viennent d'être exposées tiennent à l'insuffisance du travail évocatif dès la perception visuelle d'un énoncé de problème, c'est de **l'attention du mathématicien** qu'il s'agit : prise en compte des éléments du texte, données et question posée, évocation sur tous les mots, symboles, chiffres, sans se laisser piéger par ce qui est lu (piège du vocabulaire) ou vu sur la figure (piège de la perception visuelle), contrôle de ces évocations pour s'assurer que rien n'a été omis ou déformé. La figure de géométrie est la concrétisation de ce travail mental, mais ce n'est pas parce que la figure est juste que l'activité évocative a été suffisante. Trop d'élèves se précipitent dans une construction, obéissant à des automatismes, sans s'appuyer sur le sens de ce qu'ils font. Le projet de dessiner prend alors le pas sur le projet d'évoquer, libérant ainsi de l'angoisse face à l'inconnu de la résolution du problème.

L'élève doit alors entrer véritablement «en recherche» pour mettre en relation les éléments de l'énoncé qu'il a évoqués et ses acquis mathématiques. Il devra faire un tri parmi tous ses théorèmes et confronter ceux-ci à la situation du problème.

La mise en relation d'un problème et d'un théorème ne peut être rapide, efficace, que si elle a été préparée au moment même de l'apprentissage du théorème.

Le théorème clé ne sera mis instantanément à disposition que si, au moment de son installation en «bibliothèque mentale», l'élève s'est donné des *indices spécifiques, facilement identifiables pour le retrouver,* indices à prendre à la fois dans le «**si**» des éléments connus décrits par l'énoncé et dans le «**alors**» des questions posées. Cela suppose que l'élève s'est alors posé les questions :

«Quand l'utiliser?» et *«Pour prouver quoi?»*

La réflexion se prépare dès la mémorisation. Des difficultés en géométrie sont très souvent attribuées un peu hâtivement à la réflexion, alors qu'elles se situent bien en amont. Elles sont le symptôme, manifesté au moment de la réflexion, d'une insuffisance du projet mental de mémorisation. L'élève ne peut retrouver un théorème qu'en fonction de ce qu'il a implicitement prévu de retrouver, dans les conditions où il a imaginé le retrouver et pour l'utilisation qu'il a programmée. Si des difficultés surgissent en démonstration, il y a toujours une question à poser :

«Comment apprenez-vous un théorème?»

Apprendre un théorème est un geste mental qui mérite d'être décrit et entraîné en classe. On n'apprend pas un théorème comme on apprend une leçon d'histoire ou de biologie. Chaque matière a des exigences spécifiques de mémorisation qu'il est indispensable de clarifier. L'enseignant doit clairement les énoncer.

Pour prévenir les difficultés : réhabiliter la mémorisation

Les élèves de collège, de lycée et leurs parents véhiculent quantité d'idées fausses concernant la mémorisation. Très souvent ils l'associent au par cœur, systématiquement accompagné d'ailleurs du «bêtement»! Apprendre par cœur serait en quelque sorte s'humilier, déchoir. S'ils consentent à essayer, ils vous disent qu'ils répètent, rabâchent, comptant sans doute sur un enregistrement automatique des propositions *à mémoriser. Il y a là confusion entre ce que peut être l'activité évocative de stockage* et le mode de restitution de la leçon (déstockage). Ce n'est pas parce que je devrai réciter un théorème parfaitement avec des mots précis que je dois l'enregistrer sur le mode verbal, je peux très bien m'aider d'images mentales visuelles sur lesquelles je mettrai d'abord mes commentaires descriptifs pour ensuite entrer dans le vocabulaire spécifique mathématique rigoureux. Trop d'élèves à dominante visuelle s'acharnent à utiliser une stratégie verbale linéaire dès qu'il leur faut mémoriser, ils s'y épuisent, se découragent et finissent par renoncer par méconnaissance d'un autre moyen mental possible. Ils se réfugient alors dans «l'important c'est d'avoir compris!» (c'est aussi le cas des tables de multiplication cité dans l'introduction).

La compréhension en mathématiques, valorisée à juste titre par les élèves et leurs parents, l'est actuellement *au détriment de la mémorisation.* La compréhension appartiendrait aux bons élèves, la mémorisation serait tout ce qui reste aux autres. C'est méconnaître les lois du fonctionnement mental : mémoriser et comprendre sont deux gestes mentaux différents qui se nourrissent l'un de l'autre et qui sont inséparables.

Une compréhension sans mémorisation est éphémère donc stérile. S'il est vrai que l'on apprend mieux quelque chose que l'on a compris, il est aussi indiscutable que certains élèves peuvent s'appuyer sur des éléments dont ils se sont parfaitement imprégnés, qu'ils ont donc mémorisés, pour déclencher l'intuition de leur compréhension.

Apprendre «par cœur», ce n'est jamais bêtement! La mémorisation par cœur d'un théorème peut très bien être l'*input* de leur compréhension. Nos élèves ont actuellement en mathématiques (et sans doute ailleurs) un très fort projet de compréhension, pas de mémorisation! Ils pensent implicitement : «J'ai compris, donc je sais!» Le «j'ai compris» se limitant d'ailleurs pour la majorité d'entre eux au «je sais comment faire», éliminant le «pourquoi je le fais», privé de toute possibilité d'explication. Le travail sur le cours de mathématiques se limite alors à des séquences d'application dans des exercices répétitifs. Ils se donnent des recettes d'application. Leur réflexion mathématique (**re**-tour à des acquis et **flexion** sur l'exercice) ne se fait plus que par rapport à des «exercices-types».

Le phénomène est flagrant en algèbre, il n'en est pas moins présent en géométrie. L'entraînement de l'élève se situe uniquement dans la reproduction d'exercices familiers. Plus il s'entraîne sur des exercices semblables, plus il se ferme la faculté d'adaptation à un exercice inédit (ce que sera inévitablement le sujet d'examen). Il y a comme évacuation de la loi.

Le professeur de mathématiques doit entraîner l'élève à mémoriser pour redonner aux lois mathématiques la place qu'elles ont trop souvent perdue dans leur apprentissage. Il convient donc de réhabiliter une mémorisation élargie au service de la compréhension des mathématiques. Comprendre se situe «ici et maintenant», mémoriser c'est s'approprier le présent en faisant des liens avec d'autres acquis du passé tout en se projetant dans le futur d'une réutilisation «ailleurs et plus tard».

Mémoriser, c'est mettre du temps dans son apprentissage.

Pour prévenir les difficultés : mettre du temps dans l'espace

Dans la mesure ou un théorème de géométrie correspond toujours à une représentation spatiale, une grande majorité des élèves ont en mémoire une image visuelle (P2) plus ou moins précise sur un théorème. Cette image visuelle porte en elle, par nature, la globalité d'une situation géométrique mettant en évidence la *simultanéité de plu-*

sieurs phénomènes (par exemple un parallélogramme, ses côtés deux à deux parallèles et de même longueur et ses diagonales de même milieu...).

L'identification du théorème à cette situation globale masque l'enchaînement logique du «**si**»..., « **alors**», donc la *temporalité* de la proposition mathématique : elle a un début et une fin dans un déroulement linéaire. Cette non-prise en compte de la temporalité n'est pas le seul apanage des «visuels», beaucoup d'«auditifs», même s'ils ont mémorisé la loi avec la rigueur nécessaire (vocabulaire et notation mathématiques), peuvent l'avoir fait avec le seul projet mental implicite de le réciter ou l'écrire dans l'état (P**2**), comme une comptine insécable, sans en avoir le sens temporel (P**3**). Si, dans le prolongement de leur évocation verbale, surgit (comme c'est très souvent le cas) une image visuelle globale, celle-ci compromet encore un peu plus le codage mental de la *successivité* du «**si**»..., « **alors**».

Difficultés liées à la similitude de plusieurs théorèmes

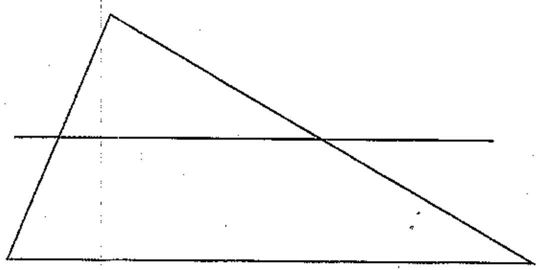
Une même image mentale visuelle peut, de plus, surgir à propos de plusieurs théorèmes différents : c'est le cas en 4^{e} des théorèmes concernant le triangle rectangle, le cercle circonscrit et la médiane relative à l'hypoténuse (voir fiches pages suivantes). C'est systématiquement le cas d'un théorème et sa réciproque. Il ne faut pas s'étonner alors de la difficulté de différenciation de l'un par rapport à l'autre. On en arrive au mélange des deux théorèmes.

En voici un exemple.

Dans un triangle,

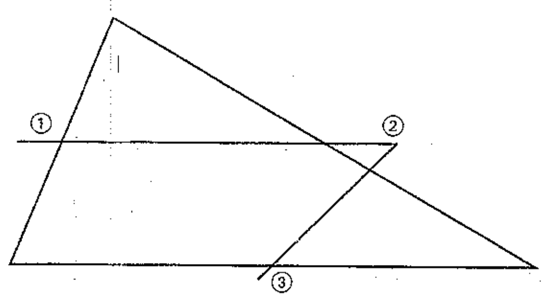
Théorème 1	**Théorème 2**
La parallèle à l'un des côtés qui passe par le milieu d'un 2^{e} *passe aussi par le milieu du 3^{e} côté.*	*La droite qui passe par le milieu de deux côtés* est parallèle au support du 3^{e} côté.

Un seul dessin pour concrétiser 2 théorèmes :



Il arrive que des élèves récitent : «*La droite qui passe par les milieux de deux côtés... passe aussi par le milieu du 3^{e} côté*»!

Ils réalisent qu'ils ont mélangé les 2 théorèmes lorsqu'on leur propose le dessin suivant :



Démonstration

L'élève qui a écrit cela a de toute évidence coupé sa mémorisation de sa compréhension.

L'accès à la démonstration, c'est-à-dire au sens du raisonnement déductif, nécessite le **codage de la temporalité d'une proposition logique**, du «**si**»... « **alors**»... du théorème. Cet apprentissage est long, difficile à mener dès la classe de 5e.

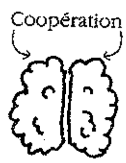
Il convient d'aider les élèves à faire évoluer leurs représentations d'un théorème, à développer leur compréhension spatio-temporelle et à élargir leurs projets de mémorisation en leur proposant des outils appropriés qui soient des «instruments psychologiques» c'est-à-dire d'aide au développement de leur pensée (Vygotsky).

Dans cet esprit, j'ai pu tester auprès des élèves de 5e et 4e l'efficacité de la «carte d'identité d'un théorème». Les très bons élèves ont réalisé et exprimé que c'était un travail qu'ils faisaient souvent implicitement, certains ont même trouvé que c'était un outil trop compliqué à rédiger : puisqu'ils avaient tout ça en tête, quel était l'intérêt de l'écrire? Tous les autres l'ont vécu comme une dédramatisation de la démonstration. Utilisé au moment du cours en classe ou en travaux individuels, cet outil leur a permis de prendre l'habitude de s'interroger sur ce qu'ils apprenaient tout en les préparant à imaginer ce qu'ils pourraient en faire.

Vous trouverez dans les pages qui vont suivre une description de cet outil à partir d'un exemple et une analyse épistémologique des conséquences de son utilisation pour l'activité mentale des élèves, ainsi que quelques cartes sur les théorèmes de 4e et 5e.

LA CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME

A. Objectifs



Comprendre

- Saisir la linéarité du raisonnement «déductif» : le «**si**..., **alors**»,
- Repérer les similitudes et différences entre deux théorèmes
- Mettre du temps dans son espace mental
- Travailler avec ses deux hémisphères cérébraux

= **Apprendre la déduction!**

S'interroger

- Questionner sur le sens de ce qui est appris
- Rendre l'élève actif
- Lui donner l'habitude de se poser des questions sur ce qu'il apprend

= **Prendre l'habitude d'un «remue-méninges» mathématique!**

Mémoriser

- Installer des savoirs précis et rigoureux
- Faire le pont entre : le *présent* du théorème, le *passé* des acquis antérieurs qui seront par le fait même réactivés, et le *futur* de son utilisation,
- Inscrire chaque théorème dans une globalité
- Faire éclater les blocs culturels en faisant des liens entre plusieurs notions (y compris entre collège et lycée)

= **Créer une culture souple!**

Anticiper

- Imaginer les utilisations possibles de chaque nouveau théorème et ses prolongements possibles
- Prendre l'habitude d'une saisie d'indices permettant de repérer très rapidement les contextes d'utilisation et de les imaginer

= **Travailler l'imaginaire d'avenir!**

Carte d'identité d'un théorème

Nom **Dessin**

Origine

Quand l'utiliser (dessin et mots)	**Pour prouver quoi ? (dessin et mots)**

Comment faire ?

Organigramme **Rédaction**

Organigramme			Rédaction
	←	**élément connu** →	Par hypothèse (ou par démonstration) on a :
Th	←	**Th** →	or :
	←	**élément nouveau** →	Par conséquent :

Dans quels contextes ?

-
-
-
-
-
-
-

Voir exemples de fiches complétées pages 77 à 80.

B___ Analyse de la carte

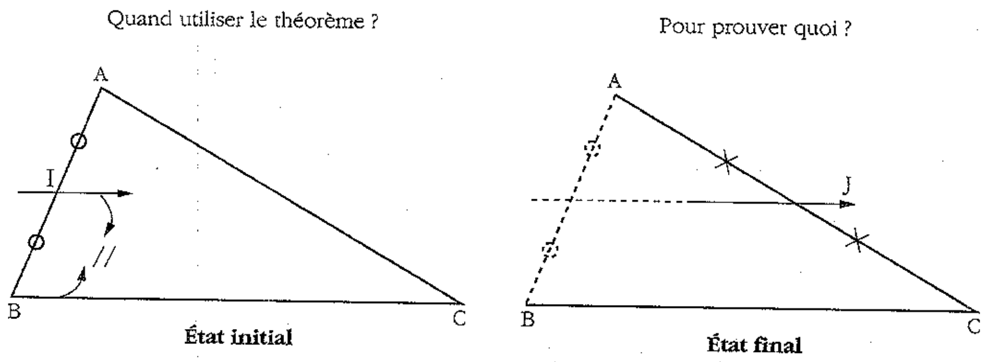
Pourquoi noter l'origine du théorème ?

Pour remonter à «l'avant-théorème» et élargir le projet de compréhension trop souvent limité au *comment l'utiliser* : projet d'application, en un projet d'explication du *pourquoi il existe*. Il s'agit de remonter la chaîne déductive et de situer le théorème dans le passé des acquis précédents, mis à disposition pour une utilisation future plus large. Ce retour en arrière rend service au «visuel» qui accède ainsi à la temporalité et à l'«auditif» qui a trop souvent l'habitude d'avancer droit devant lui, sans trop se retourner et de se perdre dans sa linéarité. La prise de conscience du pourquoi oblige ce dernier à un va-et-vient qui est pour lui la condition d'accès à une globalité.

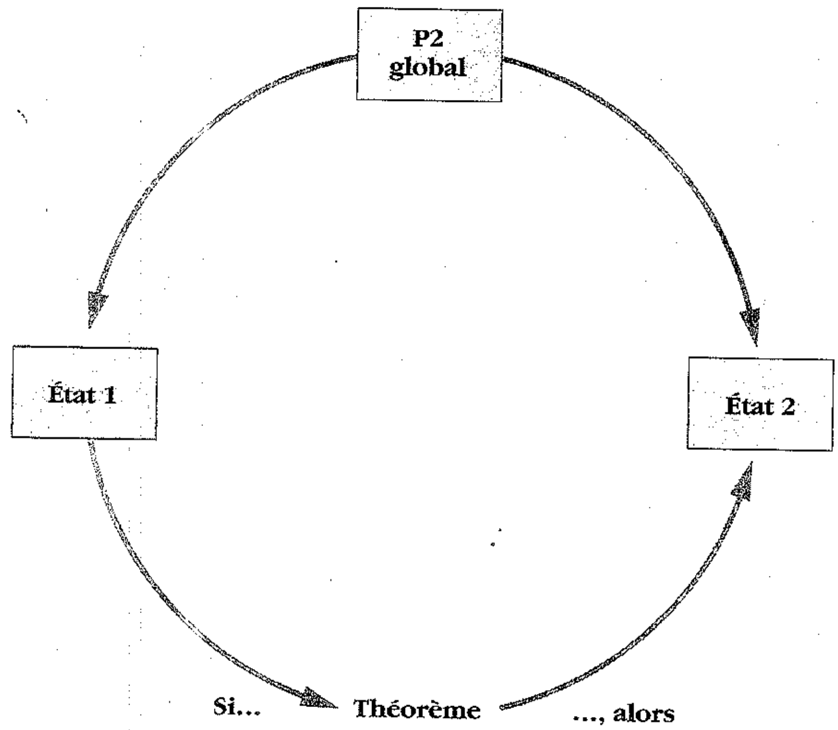
Quand utiliser le théorème ? Pour prouver quoi ?

Si ces questions ne sont pas posées **au moment de la mémorisation du théorème**, l'élève dira «je sais mes théorèmes, mais je ne sais pas les utiliser». Il s'agit ici de classer une connaissance en mettant en évidence des indices qui permettront de le retrouver sans effort au milieu de beaucoup d'autres et de faire un choix rapide entre deux théorèmes très proches : c'est le cas du triangle rectangle et de son cercle circonscrit. S'il y a tant de confusion au collège entre l'utilisation d'un théorème et de sa réciproque, c'est justement parce qu'il n'y a pas eu séparation des deux états : état initial et état final, et surtout il n'y a pas eu cette **prise d'indices**.

Pourquoi deux dessins différents



- *Pour permettre à l'élève qui mémorise un théorème sur la base d'une seule image visuelle globale en **P2***, contenant en simultané tous les éléments, à la fois l'hypothèse et la conclusion de séparer celle-ci en deux images dont les différences aboutiront pour lui à coder deux états : **un état initial et un état final**.



Le théorème étant le moyen de passer de l'état 1 à l'état 2 et de gérer la transformation, c'est mettre du temps dans son espace.
La séparation de ces deux états permet à l'élève de coder une transformation dans son espace mental, donc de le **temporaliser** et d'accéder ainsi à la linéarité de raisonnement déductif en repérant causes et conséquences, alors que la structure même de son évocation visuelle spatiale ne lui permet pas de le faire.
Il pourra alors dépasser la difficulté souvent vécue de mettre les bons mots sur son image visuelle. Il aura codé un début et une fin.

- *Pour permettre à celui qui se souvient de l'enchaînement des mots* de mettre de l'espace dans son temps en complétant sa verbalisation du théorème par deux images visuelles successives ou une image en transformation, et de le préparer à accéder à la globalité spatiale d'une figure géométrique complexe en isolant certains éléments qui seront, par le fait même, plus faciles à repérer et à analyser. Ce travail, je le répète encore une fois, effectué **au moment de l'apprentissage**, prépare tous les élèves, quelle que soit leur dominante, à cette activité spécifique aux mathématiques d'effacement mental de certains éléments d'un dessin pour mettre en évidence une structure spatiale connue d'accueil du théorème. Extraire mentalement un élément d'un ensemble est difficile et mérite d'être entraîné.

Le codage mental de deux situations différentes et ordonnées à partir d'un même dessin global mêle judicieusement l'espace et le temps en mettant en place deux séquences. Celles-ci seront codées différemment par le «visuel» et l'«auditif». Il faut ici noter l'intérêt de la kinesthésie pour l'un comme pour l'autre : le «visuel» peut coder un évoqué de mouvement pour passer de son état 1 à son état 2. Il met ainsi du temps dans son espace mental par le déroulement du mouvement.
Christophe nous le décrit : «J'ai imaginé que ma main dessinait la droite et, quand j'arrivais sur [AC], je voyais apparaître les symboles d'égalité de longueur».
«J'ai fait la même chose, dit Anne-Sophie, mais moi c'était quelqu'un qui me disait: J est le milieu de [AC].»

L'«auditif» peut, dans le prolongement de ce qu'il entend ou de sa verbalisation, évoquer un ressenti de mouvement qui débouche sur des images visuelles (ou souvent sur des impressions visuelles) ou qui les accompagne. Il aura ainsi mis de l'espace dans son temps mental. C'est ce que nous décrivent Guillaume et Laetitia.
Guillaume : «Je me récitais le théorème dans ma tête, je ne voyais pas le triangle, mais quand je me disais : "la parallèle à l'un des côtés...", j'avais une impression de deux parallèles, comme une trace qui ne restait pas.»
Laetitia : «Quand je me disais : ...qui passe par le milieu..., c'est comme si je voyais un mouvement au milieu d'un segment. Tout se passait comme si en me parlant dans ma tête, je faisais des mouvements imaginaires qui laissaient des traces lumineuses.»

La kinesthésie me semble très précieuse à développer en mathématiques car elle porte en elle l'ESPACE et le TEMPS, elle est un bon moyen de passer de l'un à l'autre pour dynamiser des images mentales visuelles ou verbales trop souvent fixes. Elle est un pont entre le spatial et le temporel par l'introduction du séquentiel.

Comment faire ?

Cette rubrique pourrait être progressivement abandonnée puisqu'elle est schématiquement toujours la même. Elle pourrait être remplacée par une fiche méthodologique unique intitulée «*Comment utiliser un théorème*» ou incluse à l'intérieur d'une fiche plus complète «*Comment faire une démonstration*» (voir fiche, page 96).

Le repérage des contextes d'utilisation

Ce repérage permet de créer des liens entre plusieurs notions, donc de travailler le «**Paramètre 3**». Il nécessite de faire éclater des blocs culturels par trop rigides, de replacer un acquis récent par rapport à d'autres, quelquefois beaucoup plus anciens, qui seront, par le fait même, réactivés et rendus disponibles dans des contextes originaux par rapport à leurs habituelles utilisations. Il s'agit d'accéder ici encore à une globalité culturelle souple pour donner du sens à son apprentissage mathématique en réorganisant des notions dans un véritable jeu de construction à démonter et à remonter sans cesse.

Ce questionnement a pour objet de développer aussi l'imagination à visée d'anticipation : «je me programme à l'avance pour des utilisations possibles très larges, j'anticipe les questions du professeur ou de l'examen». Comme Élisabeth Grosdhomme citée par Antoine de La Garanderie dans *On peut tous toujours réussir*, «je serai rarement sur-prise par un sujet de contrôle car celui-ci faisait déjà partie de mon imaginaire d'avenir. Je rentre dans cet indispensable accueil de l'imprévu. Je fais œuvre d'imagination.» Cette ouverture à des possibles prépare aussi l'élève à l'éventualité de l'évolution d'un concept. Les concepts mathématiques évoluent en effet dans la scolarité d'un élève. Cette continuelle anticipation de l'avenir évite d'assimiler un concept à un de ses attributs.

C_____ Cartes simplifiées

Lorsque les élèves commencent à prendre l'habitude de ce «remue-méninges» analytique sur les théorèmes qu'ils apprennent, on peut leur proposer un travail plus synthétique sur des **cartes simplifiées** regroupant plusieurs théorèmes sur un même sujet (voir les mandalas des pages suivantes). Les cartes précédentes mettent en évidence une analyse fine des différents cadres et conditions des utilisations respectives, ainsi que les finalités des théorèmes représentés. Ce travail d'analyse, pour ne pas rester parcellaire et pour ne pas entretenir l'élève dans la confusion que peut entraîner la multiplication des informations successives, peut être harmonieusement complété par un travail de rapprochement des différentes situations, d'une mise en correspondance des uns et des autres. Présenter plusieurs théorèmes sur une seule page permet de mettre en évidence les analogies : repérage des similitudes de vocabulaire et de représentation (les élèves le font en général assez spontanément), mais aussi de mettre en exergue des différences, en particulier d'utilisation, de plusieurs théorèmes semblables. C'est cette nouvelle attitude que l'élève a besoin d'acquérir.

La représentation en mandala offre la possibilité de considérer le catalogue complet des outils que l'on a à sa disposition tout en montrant la spécificité de chacun d'eux et leur cohérence globale. La synthèse en mandala est le complément logique du travail d'analyse détaillée des cartes d'identité précédentes. Sa forme circulaire centrée procure (selon le dire des élèves interrogés) un sentiment d'harmonie par le rassemblement sur un espace réduit d'éléments séparés, éparpillés sur plusieurs documents; il rassemble des éléments qui ne l'étaient pas (voir annexes pages 81 à 85).

L'enseignant aura le souci de stimuler et de valoriser toutes les initiatives qui peuvent être prises en ce sens par les élèves de sa classe. Il les mettra en projet de communiquer à d'autres élèves, et pourquoi pas à d'autres classes, les documents qu'ils auront imaginés. Ce projet de communication est dynamisant. Je suis personnellement souvent étonnée de la qualité de certaines de ces productions.

D_____ Le dossier «Mathématiques»

L'ensemble des cartes d'identité, ainsi que celui des fiches de synthèse heuristique, regroupées dans un dossier «Mathématiques» (voir *Mathématiques 6e*) deviennent une véritable «boîte à outils» dans laquelle l'élève prendra l'habitude de puiser et qu'il se constitue pour la suite de sa scolarité. Cela lui sera utile au lycée pour réactiver des souvenirs un peu lointains et mettre en évidence la cohérence globale de ses acquis.

Accompagné par l'enseignant, l'élève aura à compléter et à réorganiser sans cesse ses acquis. Il peut ainsi se constituer une «panoplie» vivante et devenir vraiment acteur de son apprentissage des mathématiques.

E_____ Découverte des moyens mentaux de la démonstration

Pour apprendre à faire une démonstration, il ne suffit pas que l'élève ait vu faire le professeur. Il faut qu'il puisse identifier les outils utilisés par celui-ci, y compris dans les dédales de son cheminement mental. Il a besoin d'en connaître les tenants et les aboutissants. Or, le plus souvent, il n'observe que les signes extérieurs d'une activité interne parfaitement maîtrisée.

L'élève a vu faire l'expert qu'est son professeur. Il l'a observé dans la manipulation adroite de concepts mathématiques. Il va essayer de l'imiter, ou plus exactement, comme le signale Antoine de La Garanderie, il va essayer de reproduire les mêmes résultats que lui. C'est d'autant plus vrai que les moyens de ces résultats lui sont cachés puisque ce sont des **moyens mentaux**. Comment le professeur a-t-il **vu** sur le dessin? Comment a-t-il fait **le choix** de ce théorème plutôt que de celui-là? Comment a-t-il trouvé **les étapes intermédiaires** pour répondre à la question posée? Tout cela reste complètement mystérieux, presque magique... Celui qui trouve est doué!

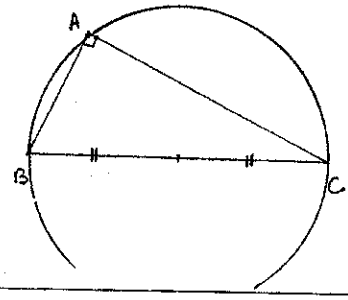
Tout d'abord, par le dialogue pédagogique, faisons découvrir aux élèves les moyens mentaux dont ils disposent pour apprendre (images visuelles ou/et images auditives ou verbales), pour comprendre (cadre de l'espace ou déroulement temporel), pour imaginer les utilisations possibles de ce qu'ils apprennent, pour découvrir les indices pertinents, pour inventer un itinéraire, etc. Montrons-leur tout ce qu'ils peuvent faire pour compléter leurs gestes mentaux spontanés et entraînons-les à cette gymnastique mentale. Mais surtout, ne mettons pas la charrue avant les bœufs : ne leur demandons pas de comprendre un raisonnement à base de lois mathématiques s'ils n'ont jamais eu accès au sens de ces propositions logiques qu'ils manipulent depuis le début du collège : comment tenir un discours cohérent si l'on n'a pas le sens spatio-temporel des mots que l'on utilise?

«Donnons à nos élèves l'intelligence de leurs moyens pour qu'ils découvrent les moyens de leur intelligence.» *Antoine de La Garanderie*

CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME

T_1

DESSIN



ÉNONCÉ

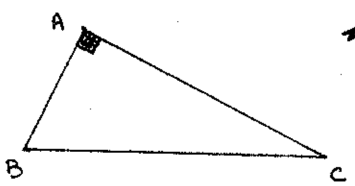
Tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de l'hypoténuse

ORIGINE

le Rectangle

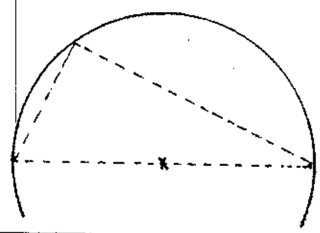
QUAND L'UTILISER ?

dans un <u>triangle rectangle</u>



POUR PROUVER QUOI ?

un <u>cercle</u>



COMMENT FAIRE ?

Organigramme		Rédaction
ABC est rectangle et [BC] est l'hypoténuse	← E.C. →	Par hypothèse (ou par démonstration) on a : ABC est un triangle rect. en A
théorème	← th →	Or : " Tout triangle rect. est inscrit dans un cercle ...
le cercle de diam. [BC] passe par A	← E.N. →	Par conséquent : le cercle de diamètre [BC] passe par A

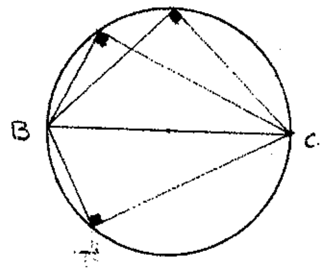
dans QUELS CONTEXTES ?

* hauteurs, médiatrices
* tangentes, rectangle, ...
*

Légende : E.C. = Elément Connu
E.N. = Elément Nouveau

CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME T_1'

DESSIN



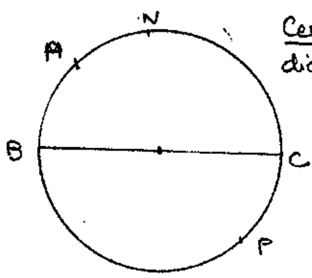
ÉNONCÉ

Tout triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [BC] est rectangle en A

ORIGINE

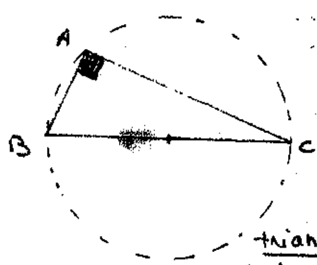
le rectangle

QUAND L'UTILISER ?



Cercle de diam. [BC]

POUR PROUVER QUOI ?



triangle rectangle

COMMENT FAIRE ?

Organigramme		Rédaction
$\mathscr{C}$ de diam. [BC] A ∈ $\mathscr{C}$	← E.C. →	Par hypothèse (ou par démonstration) on a : A est un point du cercle de diam. [BC]
théorème	← th →	Or : " Tout triangle ABC inscrit dans un cercle de diam ...
ABC rect. en A	← E.N. →	Par conséquent : ABC est rectangle en A

dans QUELS CONTEXTES ?

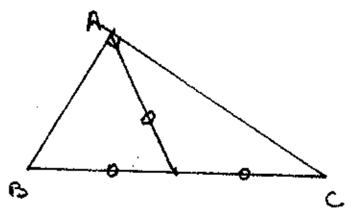
* _Cercle_
* _______
*

Légende : E.C. = Elément Connu
E.N. = Elément Nouveau

CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME

T_2

DESSIN



ÉNONCÉ

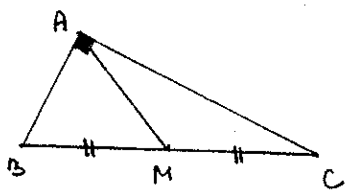
Dans tout triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

ORIGINE

le rectangle

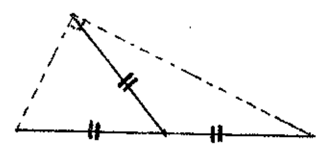
QUAND L'UTILISER ?

dans un <u>triangle rectangle</u>



POUR PROUVER QUOI ?

des <u>distances égales</u>



COMMENT FAIRE ?

Organigramme		Rédaction
ABC rect en A M = m[BC]	← E.C. →	Par hypothèse (ou par démonstration) on a : ABC est rectangle en A et M = m[BC]
théorème	← th →	Or : " Dans tout tri. rect. la médiane relative à ....
$AM = \frac{BC}{2}$	← E.N. →	Par conséquent : $AM = \frac{BC}{2}$

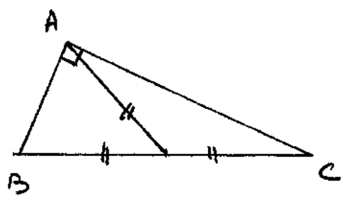
dans QUELS CONTEXTES ?

* hauteurs, médiatrices
* tangentes, rectangle.
*

Légende : E.C. = Elément Connu
E.N. = Elément Nouveau

CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME T_2'

DESSIN



ÉNONCÉ

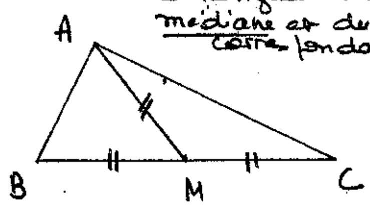
Tout triangle ABC dans lequel la médiane [AM] relative à [BC] a pour longueur $\frac{BC}{2}$ est rectangle en A

ORIGINE

le rectangle

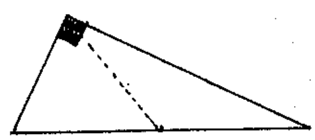
QUAND L'UTILISER ?

Quand on connaît la longueur d'une médiane et du côté correspondant



POUR PROUVER QUOI ?

un triangle rectangle



COMMENT FAIRE ?

Organigramme

dans ABC, M = m[BC] $AM = \frac{BC}{2}$	← E.C. →	
théorème	← th →	
ABC rect. en A	← E.N. →	

Rédaction

Par hypothèse (ou par démonstration) on a : M est le milieu de [BC] et $AM = \frac{BC}{2}$

Or : " Tout triangle ABC dans lequel la médiane [AM] ....

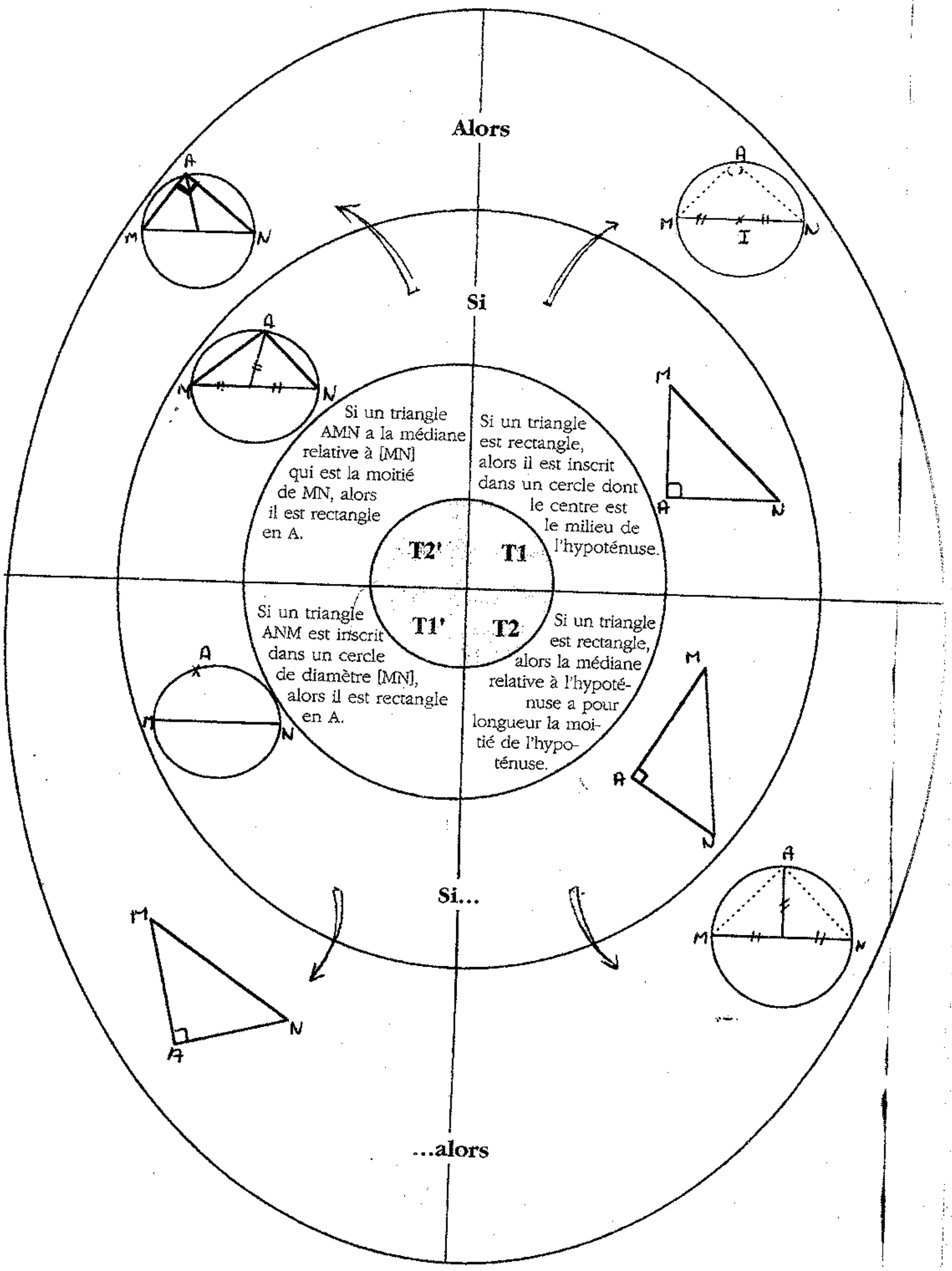
Par conséquent :
-- ABC est rectangle en A

dans QUELS CONTEXTES ?

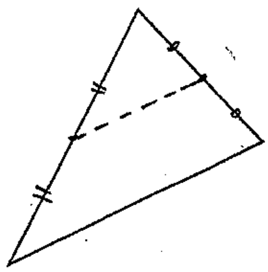
* médianes
* médiatrices
*

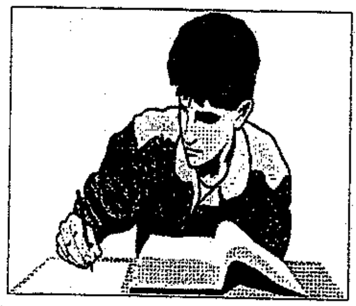
Légende : E.C. = Elément Connu
E.N. = Elément Nouveau

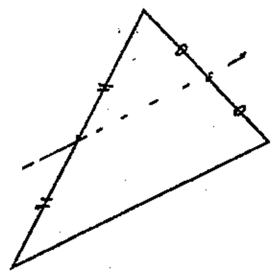
TRIANGLE RECTANGLE



Dans un triangle le segment qui joint les milieux de 2 côtés a pour longueur la moitié de celle du 3e côté	Dans un triangle toute droite qui passe par les milieux de 2 cotés est parallèle au 3e côté .
①	②
QUAND L'UTILISER ?	POUR PROUVER QUOI ?
Quand on a un triangle et les milieux de 2 côtés	Pour prouver que 2 droites sont parallèles . pour calculer une distance







COMMENT FAIRE ?

considérons le triangle ABC; I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC]

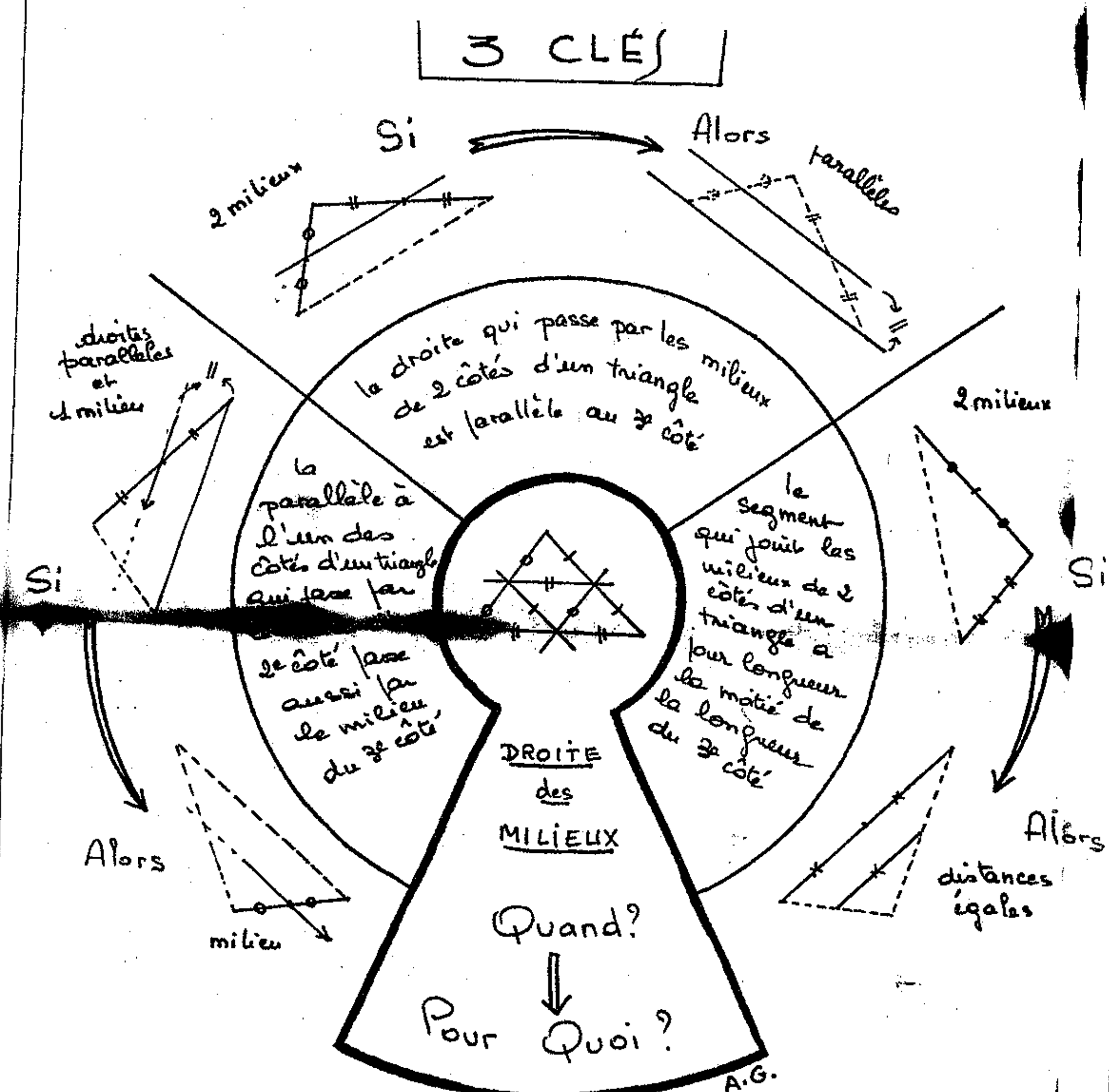
Dans un triangle toute droite qui passe par les milieux de 2 ~~cotés est parallèle au~~ 3e coté .

De plus le segment qui joint les milieux de 2 côtés a pour longueur la moitié de celle du 3e coté

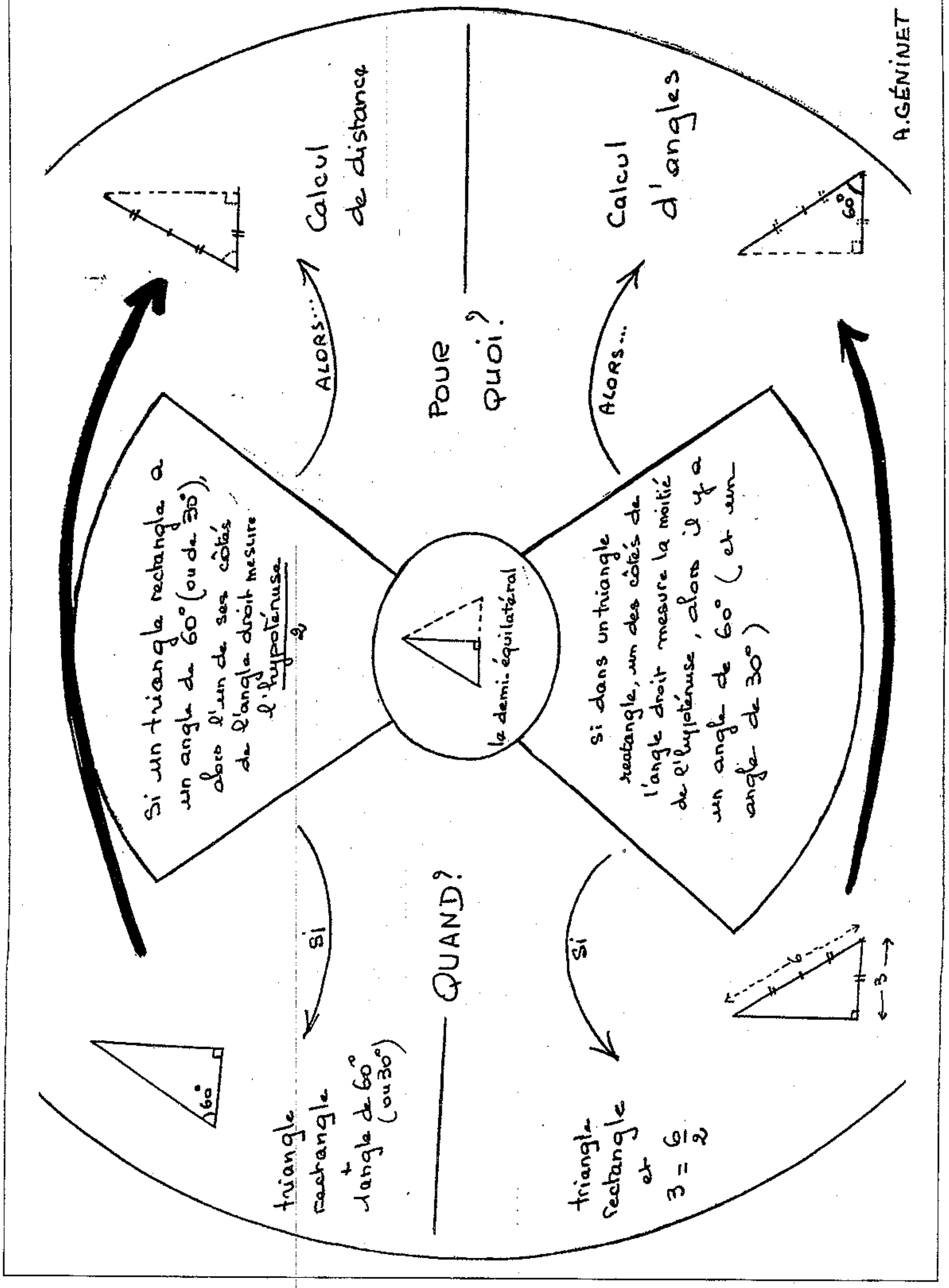
(IJ)//(BC)et IJ = BC:2

D.LARREY

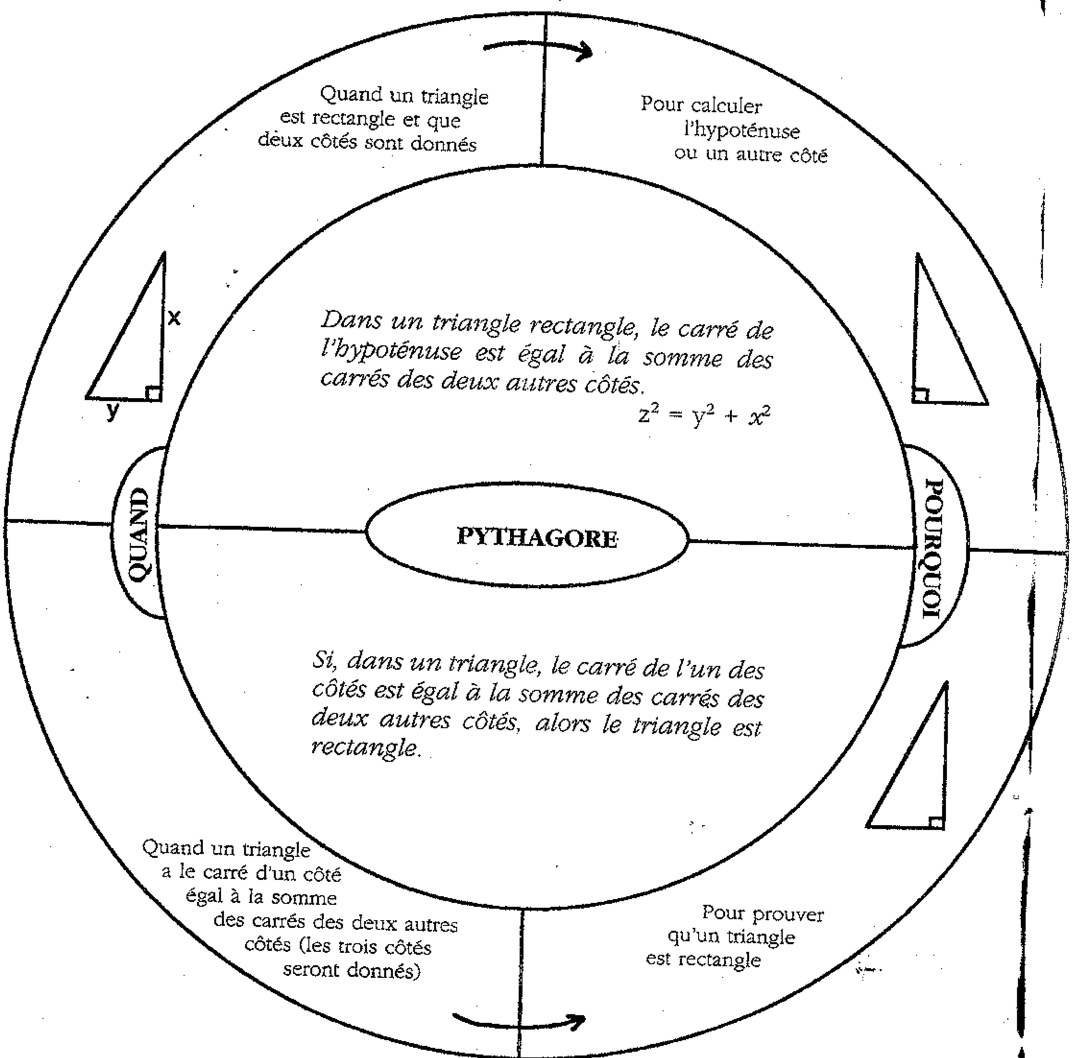
DROITE DES MILIEUX



DEMI-ÉQUILATÉRAL



PYTHAGORE


Quand un triangle est rectangle et que deux côtés sont donnés
Pour calculer l'hypoténuse ou un autre côté
x
y
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
$z^2 = y^2 + x^2$
QUAND
PYTHAGORE
POURQUOI
Si, dans un triangle, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.
Quand un triangle a le carré d'un côté égal à la somme des carrés des deux autres côtés (les trois côtés seront donnés)
Pour prouver qu'un triangle est rectangle

FICHE D'ACTIVITÉ 7

APPRENDRE ET UTILISE

Finalités communiquées aux élèves
Puisque réfléchir c'est faire un retour à ce que l'on sait, à ce que l'on a appris, il faut peut-être revoir sa façon d'apprendre les mathématiques.

Objectifs pédagogiques

- **Entraîner à la rigueur du vocabulaire mathématique.**
- **Donner du sens aux théorèmes.**
- **Expliciter le rôle du théorème dans la démonstration.**
- **Entraîner au raisonnement déductif.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première séance

• Le professeur suggère aux élèves :
«Prenez quelques minutes pour faire revenir dans votre tête la fiche «Médiatrice» (voir page 115).

• Il fait écrire les définitions et les propriétés de la médiatrice d'un segment.

• Il interroge :
«Comment avez-vous fait pour retrouver ces définitions?»

– «J'ai vu un dessin...» (**P2** visuel)
– «Je me suis redit les phrases...» (**P2** verbal)
– «Je revois la fiche, je sais à quel endroit cela se trouve, mais je n'arrive pas à lire:..» (**P1** visuel)

• Demander :
«Comment avez-vous fait pour apprendre?»

«Je n'ai pas eu besoin d'apprendre, je savais» *(à faire préciser : comment savais-tu ?...)*	«Je me répétais les définitions sans dessin, avec dessin»	«Je me suis fait un dessin dans ma tête et je me parlais»

• Faire préciser ensuite :
«Qu'est-ce que c'est pour vous savoir un théorème?»

• Annoncer :
«Aujourd'hui nous allons aller un peu plus loin et nous intéresser à **l'utilisation** d'un théorème dans un problème. Nous allons voir à quoi peut servir un théorème.

Prenons la propriété 1 (voir fiche p. 115). Comment comprenez-vous cette propriété?»
Dialogue
«Prenons la propriété 2 (voir fiche p. 115).»
Même fonctionnement

• Présenter au rétroprojecteur, pour la propriété 1, une carte d'identité à compléter et proposer d'inventer deux dessins différents : un pour le «**si**» et un pour le «**alors**».

Cette séquence développe deux perspectives : « Comment convient-il d'apprendre » (à chacun sa stratégie) ? et « Pourquoi apprendre » (lien entre mémoriser un théorème et l'utiliser en déduction dans une démonstration).

Objectifs méthodologiques

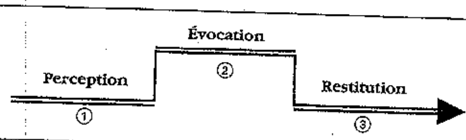
- **Dynamiser des images mentales visuelles trop souvent fixes.**
- **Mettre des mots et du mouvement sur une image mentale visuelle.**
- **Coder mentalement la différence entre un théorème et sa réciproque.**
- **Élargir son projet de mémorisation.**
- **Développer son projet de réflexion.**

COMMENTAIRES

Apprendre un théorème

Pour revoir ou réajuster une méthode d'apprentissage, il convient de faire état de ce qui est déjà installé et d'apprécier son efficacité.

Dialogue pédagogique portant sur l'étape 2 du schéma de la page 11.



Ensuite, établir un dialogue pédagogique sur le geste de mémorisation d'un thèorème et les structures de projet de sens.
Ce sera l'occasion de faire émerger des « conflits de projets » entre comprendre et apprendre (voir p. 67 chap. 3).

La suite du dialogue pédagogique a pour objectif la mise en évidence du projet dominant pour ne pas dire unique : « **savoir réciter** » avec toutefois quelques nuances :
– pour certains : reproduire à l'identique,
– pour d'autres : description personnelle avec leurs mots d'une définition comprise ou d'un objet reconnu.

Certains, qui disent ne pas avoir besoin d'apprendre, sont dans un projet de compréhension de l'objet « médiatrice » en tant que structure spatiale, beaucoup plus que dans un projet de mémorisation (récitation ou réutilisation).

Élargissement du projet de mémorisation
Le dialogue avec pour objectif la recherche de similitudes et de différences entre les deux propriétés.
Le lecteur comprendra qu'il est impossible de transcrire ces dialogues... Ils sont par essence uniques et différents dans chaque classe.

L'objectif est la mise en évidence du « **si... alors** ». Ce qui fait la différence de ces deux propriétés, c'est qu'elles ne seront pas utilisées dans les mêmes contextes et qu'elles ne serviront pas à la même chose.

Les élèves font des propositions, le professeur fait un choix et complète le transparent.

• Chaque élève est encouragé soit à se réciter la propriété correspondante sur le dessin qu'il a choisi (image visuelle + verbalisation mentale), soit à se redire d'abord la proposition, puis à voir ensuite les schémas dans sa tête (image verbale + image visuelle ou ressenti visuel).

• Refaire le même travail pour la propriété 2. Prévoir ensuite un temps d'évocation des différentes utilisations possibles des deux propriétés.

• Le professeur fait un retour sur le début de la séquence pour mettre en évidence une nouvelle façon d'apprendre et de comprendre un théorème... et rédige au tableau la fiche ci-contre. (*Cette fiche sera recopiée par les élèves ou distribuée en photocopie puis personnalisée par chacun pour repérer ce qui lui semble le plus important pour lui.*) →

2 Deuxième séance

• Le professeur annonce :
«Je vais vous proposer un petit problème de géométrie et nous allons voir comment utiliser ces propriétés.»
Construire un cercle «C» de centre «O» et prendre 2 points A et B distincts de ce cercle. Soit «I» le milieu de [AB]. Contruire «D» perpendiculaire en «I» à (AB). Que remarquez-vous?
• Réponses des élèves : ils en restent en général aux observations faites sur le dessin.
• Le professeur de 5^e fait le cours dont il a l'habitutde : mettre en évidence ce qui est de l'ordre de la certitude (données) et ce qui tient de l'observation ou de la supposition (conjecture) en faisant bien la différence entre ce qui est donné et ce qui peut en découler.

• Il présente alors l'organigramme (voir ci-contre) qui va poser spatialement cette différence et amener le rôle du théorème pour transformer la conjecture en certitude.
«Nous venons de faire une **démonstration.**
Dans le problème que je vous ai proposé, j'aurais pu poser la question :
"Démonter que D passe par O".
Je vous demanderai toujours de suivre ce schéma pour faire une démonstration.»
• Distribuer aux élèves la fiche «Démonstration». La commenter pour faire le lien entre cette fiche et le schéma précédent et faire personnaliser le document par chaque élève.

• Le professeur déclare :
«Nous ne faisons que commencer cet apprentissage de la démonstration. Ne vous inquiétez pas, nous avons toute l'année pour apprendre et même plus... car vous continuerez en 4^e.»

• Faire exprimer le ressenti des uns ou des autres.
• Les élèves sont prévenus qu'ils seront questionnés au cours suivant sur cette technique de démonstration.

Temps d'évocation
L'élève peut aussi voir mentalement deux dessins juxtaposés ou voir un dessin et le faire bouger… ou bien voir un dessin et imaginer des mouvements sur ce dessin ou encore avoir une impression de dessin et un ressenti de mouvement (kinesthésie). (*Toutes ces propositions ont été données par les élèves eux-mêmes.*)

Synthèse

J'apprends un théorème
pour
le réciter — dessin / mots exacts / symboles mathématiques
le réutiliser — Quand → **si** / Pour quoi? → **alors**

Utiliser un théorème

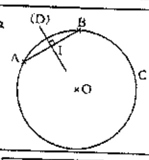
2

Mise en projet de réflexion (retour aux lois)

Élément connu ← EC → à puiser dans l'énoncé ou dans les résultats des questions précédentes
si
Théorème
alors
Élément nouveau ← EN → ce que l'on veut prouver

La démonstration

Construire un cercle C de centre O et prendre 2 points A et B distincts sur C.
Soit I le milieu de [AB].
Construire D la perpendiculaire à (AB) en I.
Démontrer que D passe par O.



par hypothèse : I = m [AB] et D ⊥ (AB)
or → Définition de la médiatrice
par conséquent D est la médiatrice de [AB]

de plus nous savons que : O est le centre de C, A ∈ C et B ∈ C
or → Définition du cercle
donc O est équidistant de A et B

Mais nous avons appris que → Si un point est équidistant des 2 extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment

Nous pouvons donc affirmer que → O ∈ D ou D passe par O

Nous venons de découvrir un nouveau théorème

La médiatrice de toute (n'importe laquelle) corde d'un cercle passe par le centre de ce cercle.

FICHE D'ACTIVITÉ 8

LA DÉMONSTRATION

Finalités communiquées aux élèves
Acquérir une technique pour faire une démonstration et se donner tous les moyens pour le faire.

Objectifs pédagogiques

- **Accéder au raisonnement déductif.**
- **Réaliser l'apprentissage de la démonstration.**
- **Réhabiliter la mémorisation.**

DÉROULEMENT DE LA SÉQUENCE

1 Première séance

• Cette première séance a pour objet de dédramatiser à l'entrée en 4^e une activité souvent mal vécue en 5^e. Trop d'élèves ont regardé faire des démonstrations mais ne se sont pas approprié les moyens d'accès, ni la technique pour le faire.

• Le professeur propose :
«Prenez quelques minutes pour faire revenir la fiche "Médiatrice".» (voir page 115)

«Qu'est-ce qui vous revient?»	«Comment cela vous revient-il?»
(fond, contenu évocatif)	(forme)

• Suggérer :
«Nous allons aujourd'hui voir comment utiliser toutes ces connaissances en **démonstration**.»

• Le professeur annonce :
«Vous voulez expliquer à un camarade ce que c'est pour vous : "démontrer". Qu'est-ce que vous lui dites?»

• Utiliser une métaphore :
«Vous rentrez dans le collège, vous êtes arrêté par un surveillant : "Que viens-tu faire ici, je ne te connais pas! – Je suis un élève de 4^{e}1. – Je ne suis pas obligé de te croire sur parole, prouve-le!" »

• Interroger alors :
«Qu'allez-vous faire? Le dire ne suffit pas. Donner une **preuve** (carte de cantine, badge du collège)... Vous m'avez dit que démontrer c'était prouver, alors quelles peuvent être les preuves en mathématiques?»
«Ce sont les **lois**, définitions, théorèmes, propriétés, opérations, calculs...»

> Démontrer,
> c'est utiliser des lois mathématiques

Cette séquence comporte deux étapes : la première fait réfléchir sur le principe et les conditions d'une démonstration; la seconde met l'accent sur des préalables.

En effet, pour prouver, il faut avoir préparé des preuves, mémorisé des arguments : ce sont les lois mathématiques.

Objectifs méthodologiques

- **Élargir son projet de mémorisation.**
- **Mettre du temps dans son espace mental.**
- **Mettre en place un projet de réflexion (retour aux lois mathématiques) au service de la démonstration.**

COMMENTAIRES

La démonstration

Il s'agit là de faire appel aux acquis des élèves, de repérer les représentations des élèves de 4e sur cet objet mathématique, de réajuster et compléter si nécessaire.

Mise en projet d'utilisation

Les réactions sont nombreuses, négatives pour la plupart : «Je n'y comprends rien; je n'y arrive jamais; je suis nul; je ne sais jamais par quoi commencer.»

Laisser exprimer le ressenti et reformuler.

Évocation du concept «démonstration»

Deux catégories de réponses

synonymes
c'est **prouver**!

savoir-faire :
«il faut donner des hypothèses et des explications»

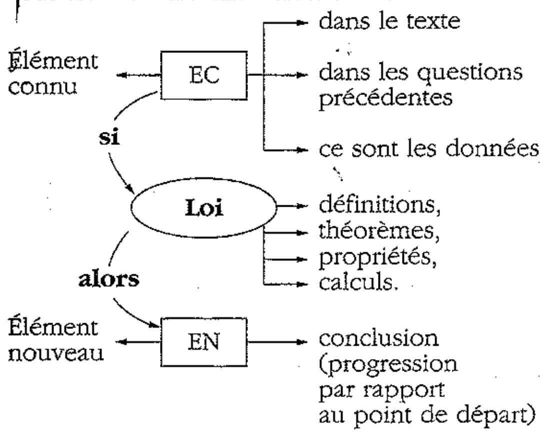
Clarification du vocabulaire

Il s'agit de mettre au clair ce que c'est que «prouver». Quelle représentation en ont-ils? Qu'est-ce qu'une preuve? Quel est son rôle? Et insister sur l'importance d'une argumentation irréfutable.

Faire évoquer cette première définition de démontrer.

• Ensuite, faire exprimer comment les élèves se représentent «hypothèses» (dans la vie courante). Certains se représentent une supposition ou un aboutissement, d'autres un point de départ.

• Le professeur expose :
«Je vais vous faire une proposition qui devrait vous aider à faire une démonstration.»



• Puis je vais vous donner une petite démonstration à faire. Vous allez essayer de **trouver les preuves** nécessaires (voir exercice ci-contre).
Les élèves réalisent l'exercice.
• On procède alors à la mise en commun et à l'analyse des réponses.
• Le professeur valorise toutes les tentatives de récitation de définition ou de théorème.

• Distribuer une copie de «la démonstration» (voir ci-contre et page 96).

• Interroger :
«Quelle disposition préférez-vous : organigramme ou rédaction?»
Beaucoup se sentent sécurisés par l'organigramme qui leur donne une idée globale du cheminement tout en fournissant à ceux qui le souhaiteraient la possibilité de commencer par la fin.

• Les élèves sont prévenus que tout au long du premier trimestre, tous ceux qui le souhaitent pourront disposer leurs démonstrations en «organigramme» si cela leur semble plus facile. Ils auront la possibilité de consulter les deux types de corrigés (qui seront distribués à chaque devoir) de façon à faire évaluer leur correction.

2 Deuxième séance

• Le professeur fait un retour sur la séance précédente et interroge la classe pour faire exprimer par tous ceux qui le souhaitent leurs impressions nouvelles sur la technique introduite. Ont-ils un sentiment de plus grande compétence? Se sentent-il sécurisés ?

• Engager un dialogue en vue de reformuler les difficultés :
«Dans le problème précédent, est-ce que tu savais les théorèmes?»

«Oui, mais je n'y avais pas pensé»
«Tu me dis que tu sais les théorèmes, mais que tu ne sais pas lesquels choisir. Est-ce qu'il y en a d'autres qui sont dans ce cas?»

«Nous allons essayer de comprendre comment il se fait que, sachant bien vos théorèmes, vous ayez du mal à choisir le bon!»

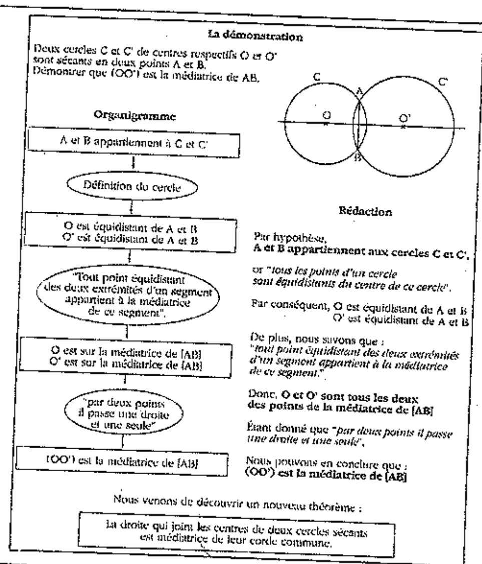
Faire émerger ensuite des représentations sur le mot «hypothèse».
De nombreuses incompréhensions de la démonstration ont à l'origine ces différentes représentations de ce que sont les hypothèses. Beaucoup d'élèves expriment que c'est ce qui est contenu dans la conclusion. Il faudra donc insister sur l'évidence que tout le monde ne parle pas de la même chose. On utilise le même mot pour désigner des choses différentes et chacun a à peu près raison à condition de positionner le cadre dans lequel on l'utilise. C'est ainsi que, pour le biologiste, l'hypothèse est une supposition que l'on va essayer de démontrer (c'est le but à atteindre).

Pour le mathématicien, les hypothèses sont des certitudes sur lesquelles on va devoir enchaîner des déductions pour arriver à de nouvelles découvertes (c'est le point de départ du travail).
Ne pas hésiter à faire un retour à l'étymologie (tous ceux qui ont besoin de liens logiques P3 s'en trouveront confortés dans leur compréhension).

hypo - thèse → hypothèse
sous - ce qui est posé ce qui est posé dessous

*Personnellement, pour ne pas entretenir trop de confusions sur le sujet, j'ai fait le choix de parler d'**éléments connus** plutôt que d'hypothèses.*

Proposition d'une stratégie de démonstration sous forme d'organigramme
Exercice à réaliser
Voir page 96 la fiche en format A4.


La démonstration

Deux cercles C et C' de centres respectifs O et O' sont sécants en deux points A et B.
Démontrer que (OO') est la médiatrice de AB.

Organigramme

A et B appartiennent à C et C'
Définition du cercle
O est équidistant de A et B
O' est équidistant de A et B
"Tout point équidistant des deux extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment".
O est sur la médiatrice de [AB]
O' est sur la médiatrice de [AB]
"par deux points il passe une droite et une seule"
(OO') est la médiatrice de [AB]

Rédaction

Par hypothèse,
A et B appartiennent aux cercles C et C'.

or *"tous les points d'un cercle sont équidistants du centre de ce cercle".*

Par conséquent, O est équidistant de A et B
O' est équidistant de A et B

De plus, nous savons que :
"tout point équidistant des deux extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment."

Donc, **O et O' sont tous les deux des points de la médiatrice de [AB]**

Étant donné que *"par deux points il passe une droite et une seule",*

Nous pouvons en conclure que :
(OO') est la médiatrice de [AB]

Nous venons de découvrir un nouveau théorème :

La droite qui joint les centres de deux cercles sécants est médiatrice de leur corde commune.

Ce document doit absolument être personnalisé par chaque élève. Il est encouragé à y ajouter ses remarques personnelles, à mettre en couleur ce qu'il avait découvert et à noter ainsi ce qui lui manque.

Faire évoquer et exprimer le ressenti des élèves pour permettre à chacun de déterminer une préférence. Chaque présentation possède des avantages et des inconvénients, il est possible de les faire exprimer par la classe.

Carte d'identité d'un théorème 2

Lors de ce dialogue, des élèves expriment généralement leurs inquiétudes face à la démonstration : «Je ne trouve jamais les bons théorèmes.»

On s'adresse d'abord à un élève précisément, pour ensuite faire rebondir sur toute la classe. Si un élève exprime ses difficultés, d'autre se sentent à la fois concernés et rassurés (ils se sentent moins seuls).

Mise en projet d'analyses des stratégies de mémorisation et d'explication des difficultés exprimées.

«Revenons à la fiche "Médiatrice" que nous avons faite ensemble. Comment avez-vous fait pour apprendre la fiche?»

• Le professeur interroge ensuite :
«Pourquoi apprenez-vous vos fiches?»
La réponse est pratiquement unanime : «Parce que vous nous avez dit qu'il y aurait une interro.»

• Le professeur poursuit :
«Si je comprends bien vous apprenez les théorèmes pour les réciter en interro, et si je n'avais pas parlé de l'interro?»...
Sourires!...
• «Donc, pour ceux qui ont appris, quand vous appreniez vous pensiez à l'interrogation que j'allais poser. Vous êtes programmés pour redire les théorèmes si je vous les demandais, vous les avez mis à disposition pour *une interrogation.* En démonstration, vous ne trouvez pas le théorème, c'est normal! Ce n'était pas prévu, **votre stockage du théorème n'étais pas programmé pour une utilisation en démonstration.**
Il va falloir changer votre façon d'apprendre vos théorèmes.»

• Le professeur propose l'outil : carte d'identité d'un théorème en prenant pour exemple la propriété : «Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment...», pour répondre aux deux questions : «Quand?» et «Pourquoi?» à la fois en mots et en dessin.
• Le professeur fait une synthèse au tableau dans les deux directions données : quand? et pourquoi? Il présente (comme **un** exemple) sa proposition et rebondit sur les propositions de la classe.
Commentaires sur le document.
• Le professeur fait exprimer le ressenti sur ce document et distribue à chacun une copie ;
• puis il donne quelques minutes pour la personnaliser et passe dans les rangs.
L'enseignant présente ensuite la carte d'identité complétée au rétroprojecteur.

• Le professeur distribue une carte d'identité vierge et suscite la recherche de propositions similaires sur la réciproque de la propriété précédente.
• Il provoque un rapide dialogue pédagogique pour faire exprimer les choix évocatifs des élèves à propos de cette réciproque.
• Puis il annonce :
«Chaque fois que nous verrons un nouveau théorème, je vous demanderai de remplir sa carte d'identité (CI).»

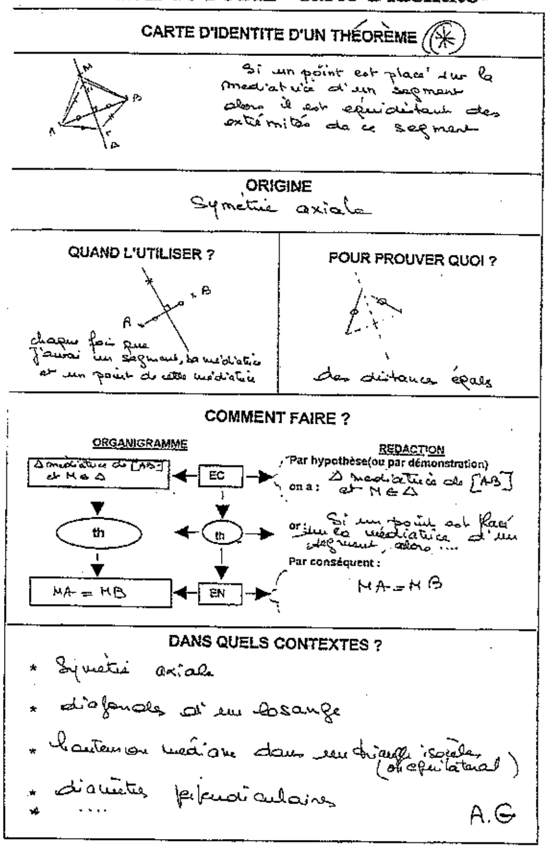
... réponses sont diverses.
- «Je ne l'ai pas apprise, je la savais». «Qu'est-ce que c'est pour toi la savoir?»
- «Je me suis répété les phrases».
- «Je me faisais le dessin dans ma tête».

Reformulation des réponses

Mémoriser

pour redire *différent* pour utiliser

Présentation de l'outil «Carte d'identité»



CARTE D'IDENTITE D'UN THÉORÈME

Si un point est placé sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment

ORIGINE

Symétrie axiale

QUAND L'UTILISER ?

chaque fois que j'aurai un segment, la médiatrice et un point de cette médiatrice

POUR PROUVER QUOI ?

des distances égales

COMMENT FAIRE ?

ORGANIGRAMME

Δ médiatrice de [AB] et M ∈ Δ ← EC → th → MA = MB ← EN

REDACTION

Par hypothèse (ou par démonstration) on a : Δ médiatrice de [AB] et M ∈ Δ

or : Si un point est placé sur la médiatrice d'un segment, alors ....

Par conséquent : MA = MB

DANS QUELS CONTEXTES ?

- Symétrie axiale
- diagonales d'un losange
- hauteur ou médiane dans un triangle isocèle (ou équilatéral)
- diamètres perpendiculaires
- ....

A.G

Proposition de transfert

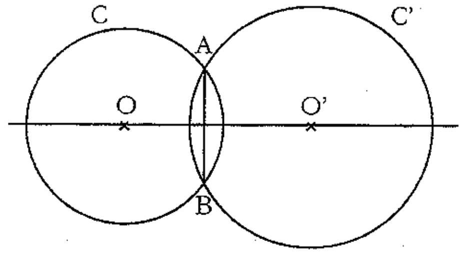
Recherche individuelle sur la réciproque du théorème précédent puis travaux de groupe avec production sur transparents.

• Il convient ici d'insister sur les deux étapes «Si» et «alors» et de redire que si elles n'ont pas été mentalement codées au moment de la mémorisation des théorèmes, il est normal de ne pas pouvoir faire un choix en démonstration. Anticiper l'utilisation de ce qui est après, c'est le rendre disponible en temps opportun.

Le même travail sera à faire à chaque nouveau théorème. Les «cartes» pourront se simplifier très rapidement. Une «carte» pourra même recueillir plusieurs théorèmes proches (voir les exemples en annexe).

La démonstration

Deux cercles C et C' de centres respectifs O et O' sont sécants en deux points A et B.
Démontrer que (OO') est la médiatrice de AB.



Organigramme

A et B appartiennent à C et C'

↓

Définition du cercle

↓

O est équidistant de A et B
O' est équidistant de A et B

↓

"Tout point équidistant des deux extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment".

↓

O est sur la médiatrice de [AB]
O' est sur la médiatrice de [AB]

↓

"par deux points il passe une droite et une seule"

↓

(OO') est la médiatrice de [AB]

Rédaction

Par hypothèse,
A et B appartiennent aux cercles C et C',

or "*tous les points d'un cercle sont équidistants du centre de ce cercle*".

Par conséquent, O est équidistant de A et B
O' est équidistant de A et B

De plus, nous savons que :
"*tout point équidistant des deux extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment*".

Donc, **O et O' sont tous les deux des points de la médiatrice de [AB]**

Étant donné que "*par deux points il passe une droite et une seule*",

Nous pouvons en conclure que :
(OO') est la médiatrice de [AB]

Nous venons de découvrir un nouveau théorème :

> La droite qui joint les centres de deux cercles sécants est médiatrice de leur corde commune.

4 Pour une culture mathématique souple et organisée : des schémas heuristiques

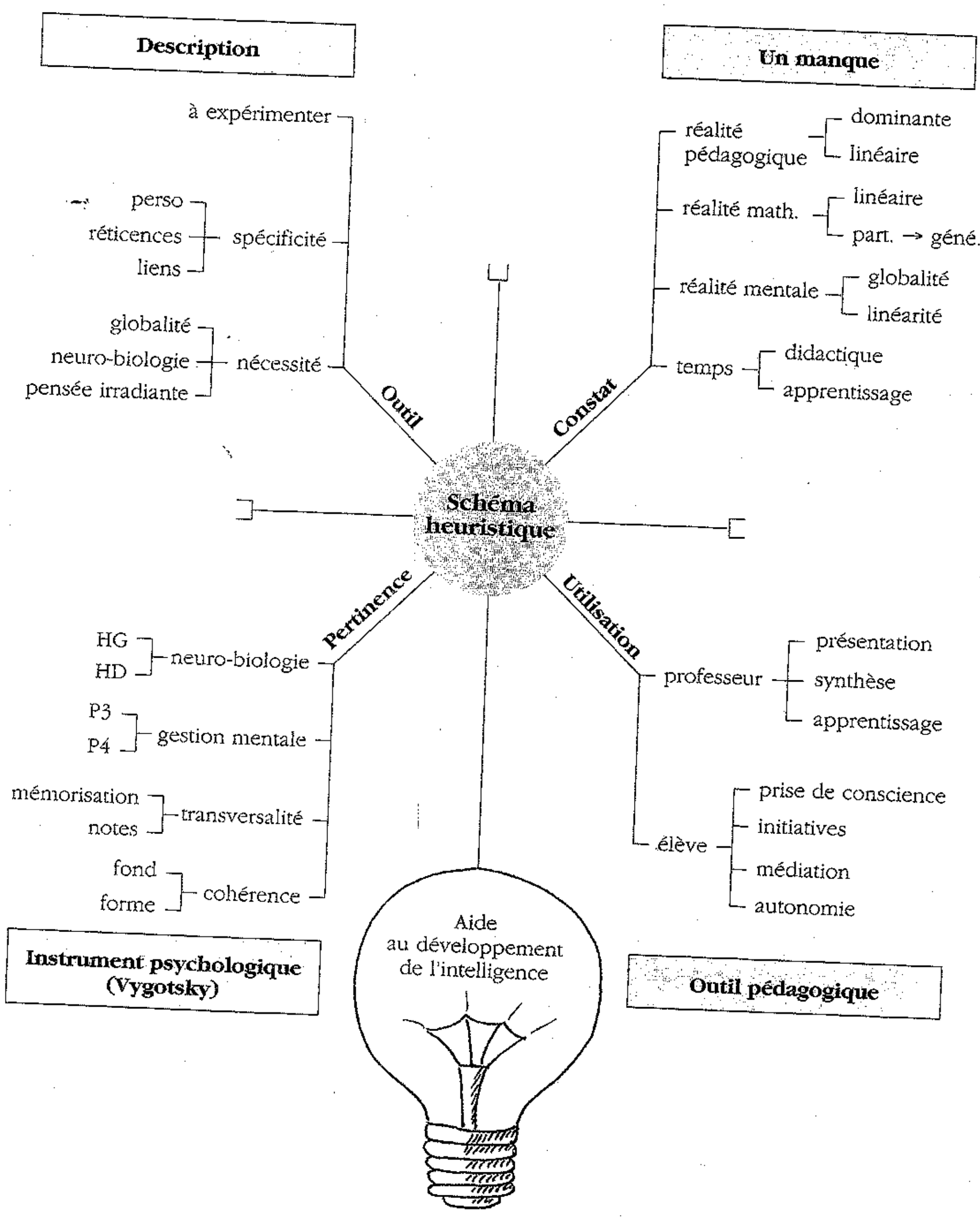
Parmi tous les obstacles au bon déroulement de la réflexion repérés et décrits dans le chapitre précédent, il en est un qui mérite un intérêt tout particulier : le référant culturel mathématiques.
Depuis son entrée à l'école, l'élève s'est constitué une « bibliothèque mentale ». Que contient-elle? Sur quels acquis l'apprenti mathématicien réfléchit-il? L'enseignant s'étonne toujours que les notions apprises, répétées à maintes reprises par lui et par d'autres avant lui, apparemment mises en mémoire, soient si difficiles à « rappeler ».
L'élève ne pourra accéder à ses acquis mathématiques que dans la mesure où sa bibliothèque sera bien rangée, facile d'accès et où le déplacement y sera aisé. L'élève a besoin de se constituer une culture mathématique souple et organisée. Force est de constater qu'il a du mal à le réaliser seul. Son professeur lui fournit les connaissances, qu'en fait-il et comment le fait-il? Là encore la Gestion mentale nous fournit une grille pertinente d'analyse de la situation pédagogique et permet de pointer un manque évident dans l'enseignement des mathématiques : **l'apprentissage de la synthèse**.

Les élèves ont vécu leurs apprentissages mathématiques successifs comme autant d'épisodes bien séparés les uns des autres. Et cela depuis les premiers acquis : quand les élèves de 6^e disent qu'il existe des nombres entiers ou décimaux, le « ou » est pour eux exclusif. Ils se sont créé des blocs culturels rigides et tous les enseignants font le constat d'un cloisonnement dans la tête des élèves. À l'entrée en 3^e, il y a comme un effacement des acquis de 4^e et à l'entrée au lycée une véritable amnésie de la culture du collège. **Il manque aux élèves l'accès à la globalité de leurs connaissances mathématiques**.

Aidés par les nombreux apports de la neurobiologie et de la Gestion mentale, nous sommes actuellement à même de revoir nos outils didactiques et d'en créer de nouveaux en tenant compte à la fois des connaissances sur le fonctionnement du cerveau, de la structure épistémologique des concepts mathématiques et de ce que nous cherchons pour nos élèves. Ces outils sont à envisager du côté de l'enseignant bien sûr, mais aussi du côté de l'élève en tant qu'activateurs intellectuels, aides au développement de son intelligence.
C'est le cas des **schémas heuristiques** qui font l'objet de ce chapitre. L'utilisation de fiches de ce type depuis plusieurs années avec les élèves de collège comme de lycée me permet d'affirmer qu'elles constituent une aide précieuse dans l'apprentissage des mathématiques.
Il vous sera présenté une analyse de la situation pédagogique et une description détaillée de l'outil et des effets que l'on peut en attendre aussi bien pour l'enseignant que pour tous ses élèves.

Les deux pages suivantes vous présentent le contenu de ce chapitre de deux façons différentes, observez-les toutes les deux. Observez aussi vos réactions face à l'une et à l'autre...
Qu'en pensez-vous? Qu'en diriez-vous? Quelle présentation choisiriez-vous? Quelle est celle qui vous semble la plus claire? La plus proche de votre pratique pédagogique?
Si vous vous livrez à cet exercice, vous pouvez vous reporter à la page 100 pour une analyse des réactions les plus fréquemment exprimées.

LE SCHÉMA HEURISTIQUE



LES SCHÉMAS HEURISTIQUES DANS L'OUVRAGE

Parmi les schémas heuristiques reproduits en annexes et dans l'encart couleur, certains sont le résultat des activités de synthèse précédemment décrites (pages 114-115 et encart couleur IV, V, VI, VII et VIII), ou des outils didactiques d'illustration de l'ouvrage (pages 118 à 122 et encart couleur I, II et III). La dernière page de l'encart couleur est utilisée en classe de 4^e mais peut être commencée dès la classe de 6^e et complétée en 5^e puis en 4^e.

Toutes les fiches en noir et blanc sont des réalisations d'élèves. Elles sont quelquefois maladroites, mais il vaut mieux une fiche imparfaite, produit d'une activité mentale riche, qu'une fiche parfaite, réalisée par l'enseignant et reçue passivement par une majorité d'élèves.

La page 121 peut être utilisée en travail individuel ou en travaux de groupe et pourquoi pas en interrogation. La page 122 sera distribuée aux élèves de 4^e en fin d'année scolaire pour être complétée en 3^e, quand ils auront vu les produits remarquables.

Ils sont ainsi encouragés à poursuivre la constitution de leur dossier et à entrevoir ainsi la continuité de leurs apprentissages des mathématiques à plus long terme. Ils se créent une «banque de données» disponible pour le lycée.

«Le schéma heuristique est à l'ère de l'information et de l'espace ce que la prise de notes linéaires était à l'ère industrielle.»

Tony Buzan

UN CONSTAT : UN MANQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

A La réalité pédagogique

Revenons aux deux documents des pages précédentes : lequel vous convient le mieux, la présentation spatiale ou la présentation linéaire plus classique.
Le premier document présente la globalité des informations du chapitre en simultanéité, sans ordre, il ne respecte pas le sens de la lecture.
Le second aligne les informations dans le sens de la lecture en une successivité, comme le font les tables des matières de tous les ouvrages. Les nombreuses personnes que j'interroge en formation s'accordent pour dire que la seconde leur est plus familière, plus spontanément accessible et que la première leur semble compliquée voire inabordable. Certains manifestent même un refus d'y entrer. Rares sont encore les ouvrages qui présentent ce type de documents synthétiques.

Force est de constater le poids de la linéarité dans nos pratiques pédagogiques : depuis le découpage des programmes jusqu'à la progression décidée par l'enseignant au sein de son programme annuel, en passant par la nature même des supports didactiques utilisés. C'est le cas du plan de la page précédente. Il suit le sens de la lecture, le sens du langage. Tous les documents de travail dont l'élève dispose sont de cette nature.

Trop nombreuses sont encore les réticences : elles sont explicables, compréhensibles mais peuvent et doivent être dépassées pour le plus grand intérêt des élèves, de tous les élèves, mais d'abord des élèves en difficulté. Je peux dire pour en avoir accompagné un grand nombre que ce sont justement ceux-là qui auraient eu le plus besoin de ces spatialisations et qu'ils ne les ont jamais trouvées dans tout leur cursus scolaire. Leur compréhension, leur mémorisation passent par la création de globalités de référence à partir desquelles ils peuvent se livrer à un travail d'analyse des contenus. Ces structures spatiales leur fournissent un sentiment de cohérence sécurisante. C'est la simultanéité des informations qui leur en procure le sens.
Ces temps de création de globalités sont encore malheureusement très rares dans nos pratiques pédagogiques.

Dans leur intéressant ouvrage *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques,* Dupin et Joshua font une analyse épistémologique de concepts scientifiques et des actions pédagogiques. Ils mettent à juste titre l'accent sur cette prégnance de la linéarité dans les objets et les pratiques mathématiques.
Si l'enseignant veut permettre à un plus grand nombre d'élèves l'accès à la compréhension des mathématiques, il doit leur donner l'occasion de réorganiser leur culture mathématique. Les élèves vivent leurs apprentissages dans la successivité des classes, des trimestres, des programmes, des chapitres. Ils ont un besoin de plus en plus urgent de rentrer dans la globalité d'une culture mathématique.

B La réalité mathématique : du particulier au général

Pendant toute sa scolarité mathématique, l'élève découvre des concepts qui vont évoluer année après année. Il va devoir élargir les représentations qu'il s'en fait. Le problème est qu'il a tendance à figer ses représentations. L'enseignant œuvre cependant dans cette direction, du moins le croit-il ; il répète chaque année que les entiers sont aussi des décimaux, que ceux-ci sont fractionnaires, qu'ils sont aussi des nombres réels. Alors comment se fait-il que la quasi-totalité des élèves de 4^e à qui on demande de penser à un nombre pensent à un entier? Bien sûr ils savent qu'il en existe d'autres mais l'évocation spontanée dans cette logique évocative sur le nombre aboutit à l'image mentale visuelle, auditive ou verbale d'un nombre entier.

Puisque x cache un «nombre» et qu'un «nombre» est spontanément un entier, il ne faut alors pas s'étonner que $-x$ suggère tout naturellement un nombre négatif. Il y a une logique à cette erreur fréquemment observée en 4^e.

Dans l'ordre de ses apprentissages, l'élève a abordé les entiers, *puis* les décimaux, *puis* les fractionnaires, *puis* les autres (π, $\sqrt{2}$...). Il a vécu chacune de ces années comme autant d'épisodes bien séparés les uns des autres, se créant ainsi des blocs mathématiques disjoints. Il y a les entiers et les décimaux, le «et» étant ici exclusif. Or ce n'est pas parce que l'enseignant répète que les entiers sont aussi des décimaux qu'il parvient à faire évoluer les représentations mentales de ses élèves.

L'enseignement des mathématiques va très souvent du particulier au général : des entiers naturels aux réels, du carré et du rectangle aux quadrilatères, des puissances à exposants entiers naturels aux puissances à exposants entiers relatifs, etc.

Les cahiers de nos élèves et les livres de mathématiques qui sont mis à leur disposition en collège manquent d'illustration de ces inclusions successives des concepts abordés.

Entre la culture de l'élève en patchwork juxtaposés :

entiers	décimaux	fractions	autres

et le schéma du spécialiste, il y a des étapes à franchir.

Représentation du spécialiste
(en espaces imbriqués)

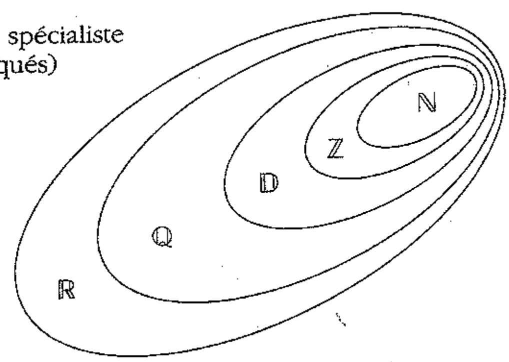
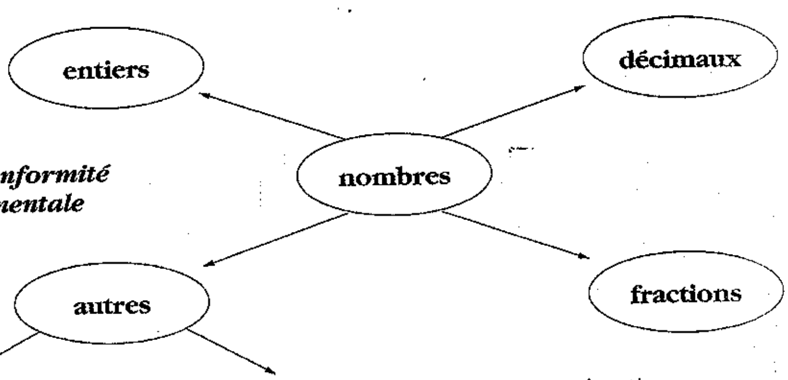


Schéma en conformité avec le concept

Il convient de provoquer chez les élèves des représentations qui fassent évoluer leur activité mentale et leur permettre d'enrichir leurs évocations spontanément limitées.

Outil d'enrichissement des évocations spontanées

= schéma en conformité avec l'activité mentale



ne sont pas encore nommés

il y a des nombres qui ne sont ni entiers ni décimaux ni fractionnaire (ex : π)

Ce schéma n'est qu'un outil au service du développement de l'activité intellectuelle des élèves.